TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

AD. MEYER, OTTO GALLANDER,
J. S. HEDSTRÖM, G. STARCK

ÅTTONDE ÅRGÅNGEN

1924—1925

STOCKHOLM
ALBERT BONNIERS FÖRLAG

STOCKHOLM
ALB. BONNIERS BOKTRYCKERI 1925

Åttonde årgångens innehåll.

I. Uppsatser.

Sid.

ALSÉN, NILS. Kristallografien i gymnasiets kemikurs 35
BÅGMAN, S. En användning av Bernoulliska tal 79
BÄCKSTRÖM, HELMER. En experimentell framställning av Coulombs lag för magnetismen 109
EDQVIST, TORGNY. Glimlampans spektrum 235
ERICSSON, FOLKE. Något om elektronrörens verkningssätt och användning vid radiomottagning 193
FOGHAMMAR, ERNST. Vattenångans maximitryck 232
FORSSTRÖM, GUST. Beräkning av jordens form 25
FRENDEL, A. Ett laborationsförsök över Peltier- och Joule-effekten ... 104
FÄNGE, BRYNOLF. Banan och nerfallspunkten för en kropp som kastas rätt upp från jordytan med stor hastighet 85
GALLANDER, OTTO. Om CGS-systemets dimensionslära 30
— — Pianot vid undervisning i akustik 100
HEDVALL, ARVID. Om fasta ämnens reaktionsförmåga 145
MEYER, AD. Om kurvan $y = \varphi\{f(x)\}$ 8
— — Om den Dopplerska principen 95
PETRINI, H. Approximationsmetoder till ekvationen $x^n = -a + bx$ ... 1
— — Approximationsmetoder till ekvationen $x^n = a - bx$ I 65
— — Det Euklideiska systemet i geometrin 129
STARCK, G. Kemiska notiser: VI, VII, VIII 46
— — Kemiska notiser IX. Kvantitativ syntes av vatten 115
— — En enkel apparat för Pascals princip 183
— — Apparat för bestämning av vattnets ångtryck 185
SÖRENSEN, AUG. Till diskussionen av den allmänna parabelekvationen 17
— — En enkel tredelning av den räta cirkulära konen 75
ZACHRISSON, EINAR. Om synkronmaskinen, trefassystemet och induktionsmotorn 196

II. Meddelanden, recensioner, uppgifter m. m.

Meddelanden:

1) En modifikation av »Molls fallapparat» (H. STENMARK) 54
2) Ett sätt att hålla tunn gummihinna elastisk under en längre tid (A. FRENDEL) 118

Sid.
3) Enheter för induktans och kapacitet (från fysiska sällskapet i Stockholm) ... 242
4) Förteckning å Pytagoreiska tal (H—m) ... 191

Bokanmälan:

MAGNUS LEMOINE, Handledning i experimentell fysikundervisning (M—r) ... 118

Insända böcker ... 128
Matematiska och fysikaliska uppgifter ... 55, 120, 186, 251
Lösningar till d:o ... 56, 121, 187, 250
Prisuppgift för årg. 1924—25 ... 63
Bedömning och lösningar till prisuppgiften ... 244
Fråga och svar ... 256
Polemik ... 139, 239
Rättelser ... 128, 192

Approximationsmetoder till ekvationen $x^n = -a + bx$.

Av HENRIK PETRINI.

I en föregående uppsats[1] har jag visat, huru man kan finna den positiva roten till ekvationen $x^n = a + bx (a > 0, b > 0)$ med vardera av två olika approximationsmetoder. Det är nu fråga om att behandla det fall, då a har motsatt tecken. Först undersökes villkoret för att någon reell positiv rot finnes, och det visar sig då, att det antingen finns ingen positiv rot, en dubbelrot, vars värde kan exakt återgivas, eller två men aldrig flera positiva rötter. Vidare skola vi finna, att båda de nämnda metoderna låta använda sig på denna ekvation, och att man i båda fallen approximerar sig fram mot den *större* roten. För att finna den mindre roten måste därför andra approximationsmetoder användas.

Om ekvationen

$$(1) \quad \ldots \quad \begin{cases} x^n = -a + bx \\ a > 0,\ b > 0 \end{cases}$$

har någon reell positiv rot, så måste å ena sidan x^n vara $< bx$, och å den andra bx vara $> a$. Vi få sålunda x innesluten mellan gränserna $b^{\frac{1}{n-1}}$ och $\frac{a}{b}$, d. v. s.

$$(2) \quad \ldots \quad b^{\frac{1}{n-1}} > x > \frac{a}{b}.$$

[1] Se denna tidskrift årg. 1923—24, h. 4, s. 219—226.

För att bestämma de positiva rötternas antal till ekv. (1) sätta vi

$$(3) \quad \ldots \quad \begin{cases} y = x^n - bx + a, \\ \because\ y' = nx^{n-1} - b, \\ \because\ y'' > 0 \text{ för } x > 0. \end{cases}$$

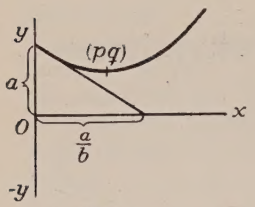


Fig. 1.

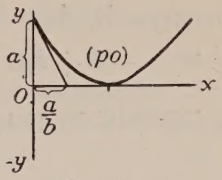


Fig. 2.

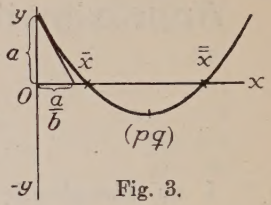


Fig. 3.

Man finner, att y' är $=0$ endast i *en* punkt (pq), där

$$(4) \quad \ldots \quad \begin{cases} p = \left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \\ q = a - (n-1)\left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}. \end{cases}$$

För $x=0$ är $y=a$ och $y'=-b$. Tangenten i punkten $(0, a)$ går således genom punkten $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$ (fig. 1, 2, 3). Då kurvan är konkav åt positiva y-axeln ($y''>0$ enl. 3), så kan den endast råka positiva x-axeln i punkter med abscissa $> \frac{a}{b}$, vilket för övrigt redan framgår av (2). Då vidare $y > 0$ för $x = b^{\frac{1}{n-1}}$, så blir $y=0$ i ingen, en eller två punkter, allteftersom q är >0, $=0$ eller <0 (figg. 1, 2, 3). Ekv. (1) har således ingen positiv rot, en dubbelrot eller två positiva rötter, allteftersom (4)

$$(5) \quad \ldots \quad a \text{ är } >,\ = \text{ eller } < (n-1)\left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

I andra fallet (fig. 2) kan man lätt konstatera, att dubbelroten är

$$(6) \quad \ldots \quad x = \left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

I tredje fallet (fig. 3) blir tydligen den mindre roten $\overline{x} < p$ (4) och den större roten $\overline{\overline{x}} > p$.

I det följande skola vi antaga, att ekv. (1) har två positiva rötter, d. v. s.

(7) . . . . . $a < (n-1)\left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}$,

och försöka bestämma dem genom lämpliga approximationsmetoder.

Första approximationsmetoden.

Ekv. (1) kan skrivas om på följande sätt

(8) . . . . . $x = \sqrt[n]{bx - a}$.

Vid approximationen sätta vi i högra ledet i stället för x in ett godtyckligt tal x_0, som dock måste väljas $> \frac{a}{b}$ och skriva

(9) . . $x_0 > \frac{a}{b}$, $x_1 = \sqrt[n]{bx_0 - a}$, $x_2 = \sqrt[n]{bx_1 - a}$,

$x_3 = \sqrt[n]{bx_2 - a}$, . . . $x_{\nu+1} = \sqrt[n]{bx_\nu - a}$.

Antages

(10) . . . . . $x_0 > \overline{\overline{x}}$,

så fås enl. (8) och (9)

(11) . . . $\overline{\overline{x}} = \sqrt[n]{b\overline{\overline{x}} - a} < \sqrt[n]{bx_0 - a} = x_1$.

Vidare är (fig. 3) $y > 0$ för $x > \overline{\overline{x}}$, $\because x_0^n - bx_0 + a > 0$, varav fås

(12) . . . . $x_0 > \sqrt[n]{bx_0 - a} = x_1$.

Av (11) och (12) finner man

$$\overline{\overline{x}} < \sqrt[n]{bx_1 - a} = x_2 < \sqrt[n]{bx_0 - a} = x_1.$$

Fortsättes på samma sätt, får man generellt

(13) . . . $x_0 > x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > \overline{\overline{x}}$.

Talen x_ν ha alltså en undre gräns u, där

$$(14) \quad \ldots \quad \begin{cases} x_\nu = u + \varepsilon_\nu, \ \lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0, \\ u \geqq \overline{\overline{x}}. \end{cases}$$

Enligt (9) är $x_{\nu+1}^n = bx_\nu - a$ och således i limes

$$(15) \quad \ldots \ldots \quad u^n = bu - a.$$

Ekv. (15) är identisk med ekv. (1), och då denna ej har någon rot som är $> \overline{\overline{x}}$, så blir

$$(16) \quad \ldots \ldots \quad u = \overline{\overline{x}}.$$

Antag nu att x_0 väljes så, att

$$(17) \quad \ldots \ldots \quad \overline{x} < x_0 < \overline{\overline{x}}.$$

Detta fall behandlas på samma sätt, men nu bli alla »$<$» utbytta mot »$>$» och tvärtom. Ekv. (15) har ingen rot mellan x_0 och $\overline{\overline{x}}$, vadan man även nu närmar sig roten $\overline{\overline{x}}$ (16).

Antages slutligen

$$(18) \quad \ldots \ldots \quad x_0 < \overline{x},$$

så finner man, då $y > 0$ för $x < \overline{x}$ (fig. 3), på samma sätt som förut (ekv. 12) $x_1 < x_0$, vadan metoden ej ger någon approximation i detta fall.

Resultat. Den första approximationsmetoden ger den större roten, om man startar med ett utgångsvärde $x_0 >$ den mindre roten $\overline{x}$, men den ger ingen approximation för $x_0 < \overline{x}$.

Anm. Roten $\overline{x}$ är visserligen okänd, men man är på den säkra sidan, om man väljer $x_0 \geqq p$ (4) (se fig. 3).

Andra approximationsmetoden.

Sätter man ekv. (1) under formen

$$(19) \quad \ldots \ldots \quad x = \sqrt[n-1]{b - \frac{a}{x}}$$

och startar med ett värde $x_0 > \frac{a}{b}$, så får man

$$(20) \quad x_0 > \frac{a}{b}, \ x_1 = \sqrt[n-1]{b - \frac{a}{x_0}}, \ x_2 = \sqrt[n-1]{b - \frac{a}{x_1}} \text{ etc.}$$

Antag

(21) . . . . . $x_0 > \overline{\overline{x}}$,

(22) . . $\because \overline{\overline{x}} = \sqrt[n-1]{b - \frac{a}{\overline{\overline{x}}}} < \sqrt[n-1]{b - \frac{a}{x_0}} = x_1$.

Vidare är enligt (21) och fig. 3 $x_0^n - bx_0 + a > 0$ (ekv. 3), varav fås $x_0 > \sqrt[n-1]{b - \frac{a}{x_0}} = x_1$,

(23) . . . . . $\because x_0 > x_1 > \overline{\overline{x}}$.

Av (20) och (23) fås nu $x_1 > x_2$ etc. och i allmänhet

(24) . . . . . $x_\nu > x_{\nu+1} > \overline{\overline{x}}$.

Liksom i förra fallet finner man, att approximation sker mot den större roten $\overline{\overline{x}}$. Väljer man åter $x_0 < \overline{\overline{x}}$, så kommer man även nu till samma resultat som i förra fallet.

Resultat. Den andra approximationsmetoden ger samma resultat som den första.

Tredje approximationsmetoden.

Ekv. (1) kan skrivas

(25) . . . . . $x = \frac{a}{b} + \frac{1}{b} x^n$.

Det gäller nu att uppsöka en metod, med vilken man kan approximera sig till den mindre roten $\overline{x}$. Då x skall vara litet, kan man försöka med att som en första approximation försumma termen $\frac{1}{b} x^n$ i högra ledet. De successiva närmevärdena fås då på följande sätt:

(26) $x_1 = \frac{a}{b}$, $x_2 = \frac{a}{b} + \frac{1}{b} x_1^n$, $x_3 = \frac{a}{b} + \frac{1}{b} x_2^n$, . . .

. . . $x_{\nu+1} = \frac{a}{b} + \frac{1}{b} x_\nu^n$,

(27) . . . . . $\because x_2 > x_1$,

varav man erhåller enligt (26)

(28) . . . . $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$

Vidare är

(29) . . . . $\bar{x} = \frac{a}{b} + \frac{1}{b}\bar{x}^n$,

$\because \bar{x} > x_1$, varav fås $\bar{x} > x_2$ etc. och i allmänhet

(30) . . . . . $\bar{x} > x_\nu$.

Sätter man $\lim_{\nu=\infty} x_\nu = u$, $\because u \leqq \bar{x}$, så finner man att u satisfierar ekv. (1), vars minsta positiva rot är $\bar{x}$, $\because u = \bar{x}$, d. v. s.

(31) . . . . . $\lim_{\nu=\infty} x_\nu = \bar{x}$.

Liksom i fråga om de två första approximationsmetoderna hade man kunnat starta med ett godtyckligt positivt värde x_0. I (26) hade man i stället för den första ekvationen fått

(32) . . . . . $x_1 = \frac{a}{b} + \frac{1}{b}x_0^n$.

Antages $x_0 < \bar{x}$, så blir enligt fig. 3 $x_0^n - bx_0 + a > 0$ (ekv. 3), varav fås enligt (32)

(33) . . . . . $x_1 > x_0$.

Vidare är enligt (29) och (32)

(34) . . . . . $x_1 < \bar{x}$,

och man återfinner således samma resultat som förut.

Antages åter $\bar{x} < x_0 < \bar{\bar{x}}$ finner man på samma sätt

(35) . . . $x_0 > x_1 > x_2 \ldots$, $x_{\nu+1} > x_\nu > \bar{x}$

och $\lim_{\nu=\infty} x_\nu = \bar{x}$.

Slutligen blir i fallet $x_0 > \bar{\bar{x}}$ värdet $x_1 > x_0$, vadan ingen approximation erhålles.

Resultat. Medelst den tredje approximationsmetoden erhålles den mindre roten $\bar{x}$, om man startar med ett positivt begynnelsevärde x_0, som är mindre än den större roten $\bar{\bar{x}}$. Är åter $x_0 > \bar{\bar{x}}$ fås ingen approximation.

Fjärde approximationsmetoden.

Ekvationen (1) kan skrivas

$$(36) \quad \ldots \quad x = \frac{a}{b - x^{n-1}}.$$

Behandlas denna ekvation på samma sätt som ekv. (25), så fås

$$(37) \quad \ldots \quad x_0 < \overline{\overline{x}}, \quad x_1 = \frac{a}{b - x_0^{n-1}}, \quad x_2 = \frac{a}{b - x_1^{n-1}},$$

$$\ldots \; x_{\nu+1} = \frac{a}{b - x_\nu^{n-1}},$$

och man finner på samma sätt

$$(38) \quad \ldots \quad \lim_{\nu=\infty} x_\nu = \overline{x}.$$

Den fjärde metoden leder alltså till samma resultat som den tredje.

Anm. Roten $\overline{\overline{x}}$ är visserligen obekant, men man är enligt fig. 3 på den säkra sidan, om man startar med ett värde $x_0 \leqq p$ (ekv. 4).

Sammanfattning. Ekvationen $x^n - bx + a = 0$, a och b positiva, har två olika positiva rötter, om a är $< (n-1)\left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}$. Den större av dessa erhålles medelst de två första approximationsmetoderna, om man startar med ett utgångsvärde $x_0 \geqq \left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. Den mindre fås med de två sista, om x_0 är $\leqq \left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. Samtliga approximationer äro ständigt stigande eller ständigt sjunkande.

Om kurvan $y=\varphi\{f(x)\}$.

Av AD. MEYER.

Nedanstående uppsats avser att behandla uppritningen av kurvan $y=\varphi\{f(x)\}$, då $y=f(x)$ och $y=\varphi(x)$ äro givna endast i form av kurvor, vilkas ekvationer ej behöva vara kända, men som dock hava derivator av godtycklig ordning, d. v. s. dels att upprita den genom godtyckliga punkter,

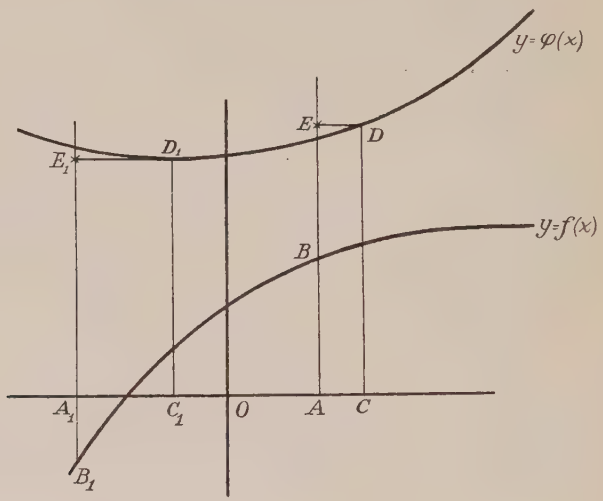


Fig. 1.

dels att bestämma dess maxima och minima ävensom de inflexionspunkter, där tangenten är parallell med x-axeln. Övriga inflexionspunkter äro dels av mindre intresse, dels torde de vara synnerligen svåra att geometriskt bestämma. När därför i det följande talas om inflexionspunkter, så förstås därmed alltid en sådan, där tangenten är parallell med x-axeln.

Vad den första frågan, uppritning genom punkter beträffar, så är den synnerligen enkel: Man tager en godtycklig punkt B på kurvan $y=f(x)$, drar dess ordinata BA och avsätter den såsom OC (fig. 1) på x-axeln, drager genom C ordinatan CD till kurvan $y=\varphi(x)$, och avsätter CD på AB såsom AE. E blir då en punkt på kurvan $y=\varphi\{f(x)\}$.

Skulle funktionerna vara flertydiga, så att kurvan har slingor eller dylikt, så behandlas var gren för sig.

Enär $y=\varphi\{f(x)\}$ även kan skrivas $x=f^{-1}\{\varphi^{-1}(y)\}$, så kan man även använda följande konstruktion (fig. 2). Man

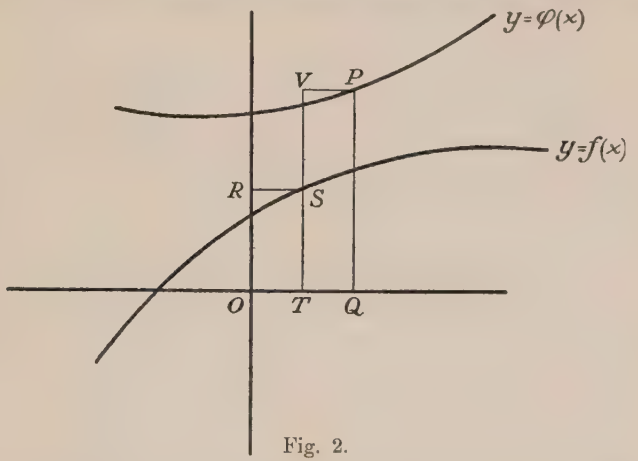


Fig. 2.

tager en punkt P på kurvan $y=\varphi(x)$, drar dess ordinata PQ och avsätter OQ såsom OR på y-axeln. RO inpassas såsom ordinata ST i kurvan $y=f(x)$, och PQ avskäres på TS såsom TV. V är då en punkt på kurvan. Mellan dessa båda konstruktionsmetoder förefinnes dock en väsentlig olikhet: Om vi antaga att de båda kurvorna $f(x)$ och $\varphi(x)$ kunna entydigt och utan avbrott följas från $x=-\infty$ till $+\infty$, så svarar enligt den första metoden mot varje punkt B på den förra en och blott en punkt E på $\varphi\{f(x)\}$, under det att medelst den andra metoden mot varje punkt P på $\varphi(x)$ svarar ingen, en eller flera punkter V på $\varphi\{f(x)\}$. Med båda metoderna får man dock hela kurvan $\varphi\{f(x)\}$.

Vi övergå nu till bestämmande av extremvärdena.

Av ekvationen $y=\varphi(u)$, där $u=f(x)$, fås omedelbart

$$y'=\varphi'(u)\,u',$$

varav genast synes, att y ej kan hava andra extremvärden än sådana där antingen $f'(x)$ eller $\varphi'(u)$ är $=0$.

Antaga vi då först (fig. 3), att $f'(x)=0$, men $\varphi'(u)\neq 0$, så inses lätt, utan all räkning, ur figuren, att

Om u har ett min. för $x=a$, så har

y ett min. för $x=a$ om $\varphi'(u)>0$ (fig. 3 a),

y » max. » » » $\varphi'(u)<0$ (fig. 3 b).

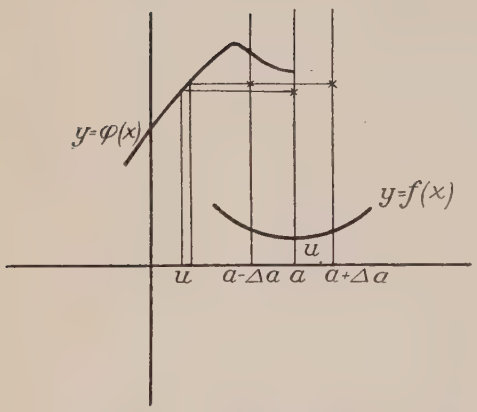


Fig. 3 a.

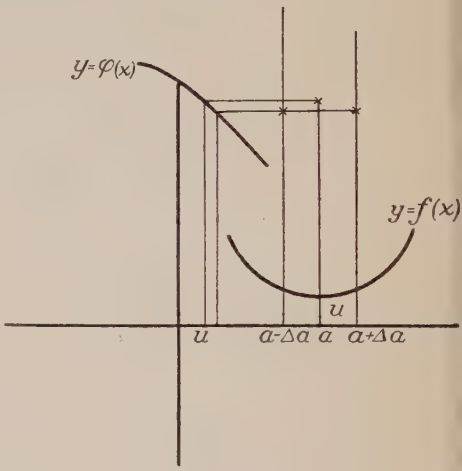


Fig. 3 b.

Om u har ett max. för $x=a$, så har

y ett max. för $x=a$ om $\varphi'(u)>0$,

y » min. » » » $\varphi'(u)<0$.

Har u en stigande inflexionspunkt för $x=a$, så får y en stigande eller fallande inflexionspunkt för $x=a$ alltefter-som $\varphi'(u)\gtrless 0$, och om u har en fallande inflexionspunkt, så får y en fallande eller stigande inflexionspunkt alltefter-som $\varphi'(u)\gtrless 0$. Extremets eller inflexionspunktens ordinata, som är $\varphi\{f(a)\}$, kan konstrueras såsom ovan (fig. 1).

Allt detta naturligtvis under förutsättning att kurvan $y=\varphi(u)$ verkligen existerar för $x=a$, d. v. s. för $u=f(a)$. I motsatt fall ersättes extremvärdet av två slutpunkter, såsom i fig. 4, som framställer fulldragna kurvorna

$$y=f(x)=x^2-2x \text{ och } y=\varphi(x)=\sqrt{x},$$

samt den prickade $y=\varphi\{f(x)\}=\sqrt{x^2-2x}$.

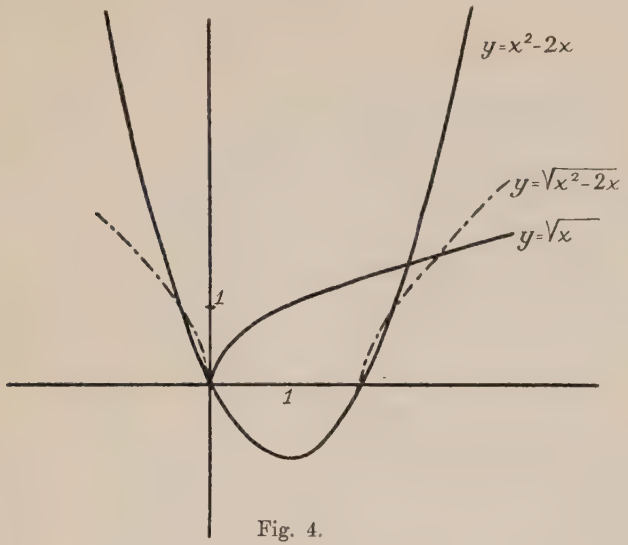


Fig. 4.

Alla de här angivna resultaten kunna naturligen även fås på analytisk väg genom successiv derivering av $y=\varphi(u)$. De första 4 à 6 derivatorna äro ganska lätta att bilda, och för den n:te derivatan finnes i utförligare läroböcker i differentialkalkyl (t. ex. Bertrand, Calcul differentiel) en generell formel, men denna är så krånglig, att den för vårt ändamål är oanvändbar. Vi vilja därför slå in på en annan, betydligt lättare väg, som ger oss *formen* på denna derivata, på sådant sätt, att den kan användas för detta ändamål.

Vi hava då

$$y = \varphi(u)$$
$$y' = \varphi'(u)\,u'$$
$$y'' = \varphi'(u)\,u'' + \varphi''(u)\,u'^2$$

$$y''' = \varphi'(u)\,u''' + \varphi''(u)\cdot 3u'u'' + \varphi'''(u)\,u'^3$$
$$y^{IV} = \varphi'(u)\,u^{IV} + \varphi''(u)[4u'u''' + 3u''^2] + \varphi'''(u)\cdot 6u'^2u'' + \varphi^{IV}(u)\,u'^4$$
$$y^{V} = \varphi'(u)\,u^{V} + \varphi''(u)[5u'u^{IV} + 10u''u'''] + \varphi'''(u)[10u'^2u''' + 15u'u''^2] + \varphi^{IV}(u)\cdot 10u'^3u'' + \varphi^{V}(u)\,u'^5$$

— — — — — — — — — — — — — —

Sätta vi då

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)} &= \varphi'(u)\,u^{(n)} + A_2^{(n)}\varphi''(u) + \ldots + A_\mu^{(n)}\varphi^{(\mu)}(u) + \ldots + \\ &\quad + A_{n-1}^{(n)}\varphi^{(n-1)}(u) + \varphi^{(n)}(u)\,u'^n, \\ \text{där } A_2^{(n)} &= \Sigma k_\nu u^{(r_1)}u^{(r_2)},\ A_3^{(n)} = \Sigma k_\nu u^{(r_1)}u^{(r_2)}u^{(r_3)},\ \ldots,\ A_\mu^{(n)} = \\ &\quad = \Sigma k_\nu u^{(r_1)}u^{(r_2)}\ldots u^{(r_\mu)}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

varest alla r äro $< n$. (Flera r kunna även vara lika, så att en viss derivata av u kan ingå i högre dignitet.)

Så få vi

$$y^{(n+1)} = \varphi'(u)\,u^{(n+1)} + \varphi''(u)\left[u'u^{(n)} + \frac{dA_2^{(n)}}{dx}\right] +$$
$$+ \varphi'''(u)\left[u'A_2^{(n)} + \frac{dA_3^{(n)}}{dx}\right] + \ldots + \varphi^{(n-1)}(u)\left[u'A_{n-2}^{(n)} + \frac{dA_{n-1}^{(n)}}{dx}\right] +$$
$$+ \varphi^{(n)}(u)[u'A_{n-1}^{(n)} + n\,u'^{n-1}u''] + \varphi^{(n+1)}(u)\,u'^{n+1}.$$

Här hava koefficienterna för $\varphi''(u)\ldots\varphi^{(n-1)}(u)$, såsom lätt synes, samma form som $A_2^{(n)}\ldots A_{n-1}^{(n)}$, om blott n ersättes med $n+1$, d. v. s. alla $r < n+1$.

Formeln (1) är således generell. Om vi då hava

$$u' = u'' = \ldots = u^{(m-1)} = 0$$

men $u^{(m)} \neq 0$, så är även

$$y' = y'' = \ldots = y^{(m-1)} = 0, \text{ men } y^{(m)} = \varphi'(u)\,u^{(m)},$$

varav satserna ovan omedelbart följa.

Övergå vi nu till det fall, att $\varphi'(x) = 0$ men $f'(x) \neq 0$, så se vi genast genom den andra konstruktionsmetoden sid. 2, fig. 2, att den eller de punkter V av kurvan $y = \varphi\{f(x)\}$, som motsvara P, alltid ha samma ordinata som denna (om de överhuvudtaget existera). Härav följer omedelbart, att om $y = \varphi(x)$ har ett max. eller min. $= b$ för $x = a$, så måste $\varphi\{f(x)\}$ i den eller de motsvarande punkterna, vilkas abskissor fås ur ekvationen $f(x) = a$, hava ett extremum *av samma slag* och av samma storlek (b), oberoende av $f'(x)$.

Likaledes inses, att om $y=\varphi(x)$ har en inflexionspunkt (med tangenten parallell med x-axeln), så har även $y=\varphi\{f(x)\}$ en inflexionspunkt i den motsvarande punkten. Om denna blir fallande eller stigande (för växande x) är emellertid ej så lätt att se.

Vi vända oss därför ånyo till vår formel (1), av vilken vi genast se, att om $\varphi'(u)=\varphi''(u)=\ldots=\varphi^{(m-1)}(u)=0$, men $\varphi^{(m)}(u)\neq 0$, så är

$$y^{(m)}=\varphi^{(m)}(u)\cdot u'^{m}.$$

Om således m är jämnt, så har $y^{(m)}$ samma tecken som $\varphi^{(m)}(u)$, vilket innehåller den nyss anförda satsen, ty $\varphi^{(\mu)}(x)=0$ i en punkt med abskissan a betyder detsamma som att $\varphi^{(\mu)}(u)=0$ i alla punkter med abskissorna $f^{-1}(a)$. Om däremot m är udda, och således kurvan $y=\varphi(x)$ har en inflexionspunkt, så får $y^{(m)}$ samma tecken som $\varphi^{(m)}(u)$ om u' är positivt, men motsatt om u' är negativt. En stigande inflexionspunkt hos kurvan $y=\varphi(x)$ ger således en likadan hos $y=\varphi\{f(x)\}$, i varje punkt $\begin{cases}x=f^{-1}(a)\\ y=\varphi(a)\end{cases}$, om $f'(x)$ är positiv för $x=f^{-1}(a)$, men av motsatt slag om $f'(x)$ är negativ för samma x-värde. Det senare kan förefalla paradoxalt, då ju ordinatorna till de motsvarande punkterna till de tre

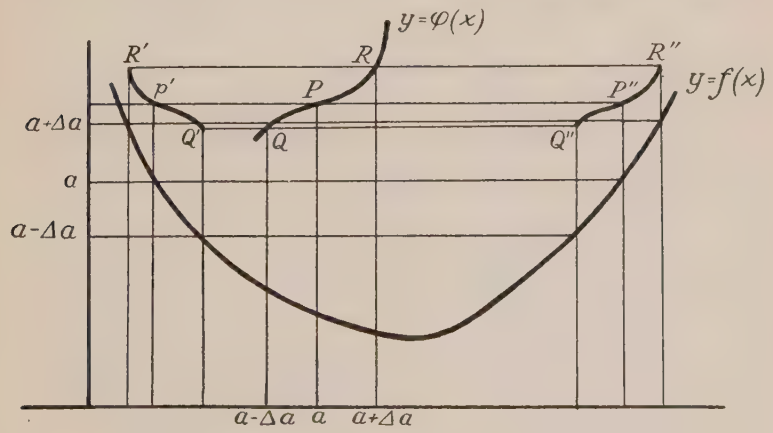


Fig. 5.

punkterna hos kurvan $y=\varphi(x)$ som motsvara abskissorna $a-\Delta a$, a och $a+\Delta a$ äro lika med motsvarande ordinator hos $y=\varphi\{f(x)\}$, men förklaringen är, att abskissorna följa i motsatt ordning, såsom framgår av fig. 5.

Återstår det fall, att såväl $f'(x)$ som $\varphi'(u)$ är $=0$.

Antaga vi då, att $y=f(x)$ har ett extremum i (a, b) och $y=\varphi(x)$ ett extremum i (b, q), så se vi genom den första konstruktionsmetoden genast av fig. 6 a. b. c. d., att $y=\varphi\{f(x)\}$ måste hava ett extremum i (a, q), och att detta måste vara av samma slag som det för $\varphi(u)$, oberoende av $f(x)$.

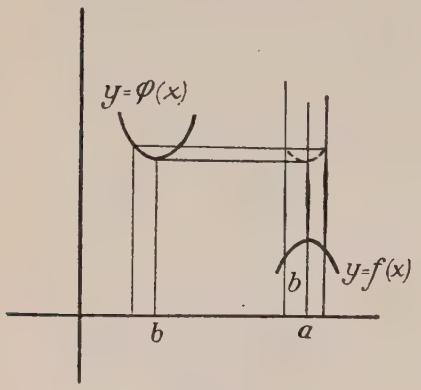


Fig. 6 a.

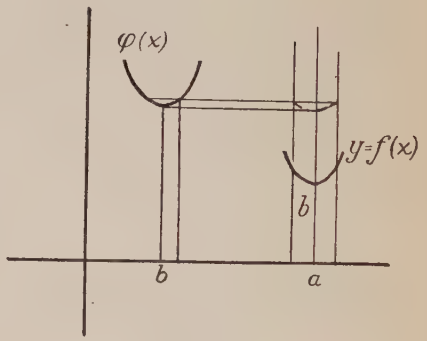


Fig. 6 b.

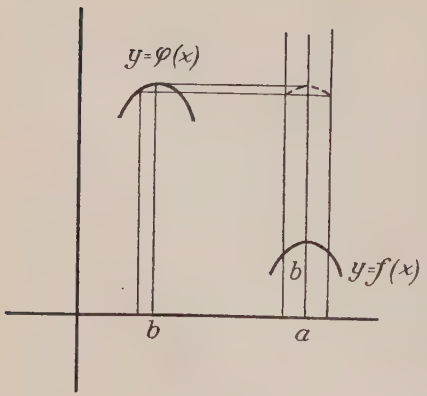


Fig. 6 c.

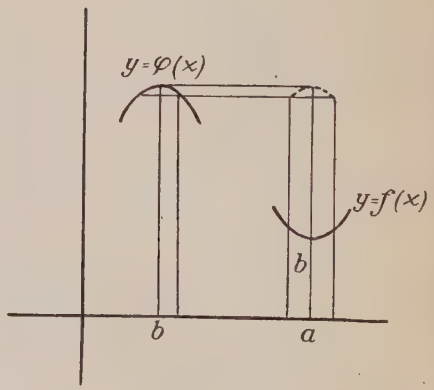


Fig. 6 d.

Om endera har en inflexionspunkt, men den andra ett extremum, så förhåller sig allting uppenbarligen på samma sätt som om den motsvarande derivatan vore >0, om inflexionspunkten är stigande, men <0 om den är fallande.

Hava båda inflexionspunkter, så fås en stigande inflexionspunkt, om $f(x)$ och $\varphi(x)$ hava båda stigande eller båda fallande inflexionspunkter, men en fallande inflexionspunkt, om de äro av olika slag.

Om vi vilja härleda dessa egenskaper analytiskt ur vår formel (1), så kan detta endast ske genom att närmare undersöka egenskaperna hos koefficienterna $A_r^{(\mu)}$. Detta kan genomföras, men blir ganska besvärligt. Mycket enklare blir saken, om vi antaga, att funktionerna $u=f(x)$ och $y=\varphi(u)$ kunna i närheten av resp. $x=a$ och $u=b=f(a)$ utvecklas i potensserie. Om vi då kalla $\varphi(b)$ för c, så få vi

$$u-b=k(x-a)^p+k_1(x-a)^{p+1}+\ldots$$
$$y-c=l(u-b)^q+l_1(u-b)^{q+1}+\ldots$$

Vi få då

$$y-c=l[k(x-a)^p+k_1(x-a)^{p+1}+\ldots]^q+\ldots=$$
$$=lk^q(x-a)^{pq}+\text{termer av högre ordning.}$$

Således försvinna då de $(pq-1)$ första derivatorna av $y=\varphi\{f(x)\}$, och den pq:te blir, så när som på en positiv konstant, $=lk^q$.

Om således q är jämnt, d. v. s. $\varphi(x)$ har ett extremum, så får $y^{(pq)}$ samma tecken som l, d. v. s. y får ett extremum av samma slag som φ.

Är däremot q udda, så får $y^{(pq)}$ samma tecken som lk. Vi kunna då särskilja två fall:

1) p jämnt, således $f(x)$ ett extremum. Då får y ett minimum om f har ett minimum och φ är stigande, eller om f har ett maximum och φ är fallande. I annat fall ett maximum.

2) p är udda, således har $f(x)$ en inflexionspunkt. Då får y en stigande inflexionspunkt, om inflexionspunkterna för f och φ äro av samma slag, i motsatt fall en fallande

inflexionspunkt, vilket allt överensstämmer med de förut på geometrisk väg funna resultaten.

Härjämte får man även följande generella sats:

Om kurvan $y=f(x)$ *i punkten* $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ *har en tangering av* $(p-1)^{sta}$ *ordningen med en med x-axeln parallell linje, och* $y=\varphi(x)$ *i punkten* $\begin{cases} x=b \\ y=\varphi(b) \end{cases}$ *en dylik tangering av* $(q-1)^{sta}$ *ordningen, så har kurvan*

$$y=\varphi\{f(x)\}$$

i punkten $\begin{cases} x=a \\ y=\varphi(b) \end{cases}$ *en dylik tangering av* $(pq-1)^{sta}$ *ordningen.*

Till diskussionen av den allmänna parabelekvationen.

Av AUG. SÖRENSEN.

I föregående årgång av denna tidskrift (p. 129—133) har adjunkten S. Bågman fäst uppmärksamheten på ett från den vanliga metoden avvikande förfarande vid diskussionen av den allmänna andragradsekvationen med två variabler. Metoden kan sägas vara baserad på den analytiska egenskap hos ett kägelsnitt, som kommer till uttryck i dess ekvation, hänförd till axlarna resp., vad parabeln beträffar,[1] till axeln och vertextangenten såsom koordinataxlar, och som möjliggör en enkel härledning av i förra fallet axlarnas ekvationer, i senare fallet ekvationerna för axel och vertextangent. Utgår man i fråga om parabeln i stället från dennas fundamentala egenskap att utgöra orten för en punkt, vars avstånd från en given punkt är lika med avståndet till en given rät linje, kan man på liknande sätt erhålla styrlinjens ekvation och brännpunktens koordinater. Utan att tillskriva denna metod något särskilt företräde, vill jag här visa, hur den skulle kunna genomföras och i praktiken tillämpas.

1. Låt en ekvation vara given under formen

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0\,, \quad . \; . \quad (1)$$

där $AB=C^2$. Vi skola då söka bringa (1) under formen

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x\cos\alpha+y\sin\alpha-d)^2\,. \; . \quad (2)$$

Utvecklas (2), erhålles

$$(x\sin\alpha-y\cos\alpha)^2-2(x_1-d\cos\alpha)x-2(y_1-d\sin\alpha)y+ \\ +x_1^2+y_1^2-d^2=0\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

[1] I sistnämnda avseende sammanfaller dock förfarandet med det flerestädes använda, se t. ex. *Salmon-Fiedler*, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 1, 8. Aufl. 1915, § 198; *Malmquist*, Föreläsningar i matematik, Stockholm 1923, p. 19 (ex. 4).

vilken ekvation måste vara identisk med den ekvation

$$A_1x^2+B_1y^2+2C_1xy+2D_1x+2E_1y+F_1=0, \quad . \quad (4)$$

som uppkommer, om (1) divideras med $A+B$. Genom jämförelse mellan (3) och (4) erhålles således

$$\begin{cases} \sin^2\alpha = A_1, & \ldots\ldots\ldots (5) \\ \cos^2\alpha = B_1, & \ldots\ldots\ldots (6) \\ \sin 2\alpha = -2C_1, & \ldots\ldots\ldots (7) \\ x_1 - d\cos\alpha = -D_1, & \ldots\ldots (8) \\ y_1 - d\sin\alpha = -E_1, & \ldots\ldots (9) \\ x_1^2+y_1^2-d^2 = F_1. & \ldots\ldots\ldots (10) \end{cases}$$

Ur (8) och (9) erhålles

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{(x_1+D_1)^2}{\cos^2\alpha} = \frac{(y_1+E_1)^2}{\sin^2\alpha} \\ &= \frac{x_1^2+y_1^2+2D_1x_1+2E_1y_1+D_1^2+E_1^2}{1} \\ &= x_1^2+y_1^2-F_1, \qquad \text{enligt (10),} \end{aligned}$$

varav

$$2D_1x_1+2E_1y_1+D_1^2+E_1^2+F_1=0$$

eller

$$2D_1(x_1+D_1)+2E_1(y_1+E_1)=D_1^2+E_1^2-F_1 \ldots \quad (11)$$

Ur (8) och (9) erhålles därefter

$$\begin{aligned} d &= \frac{x_1+D_1}{\cos\alpha} = \frac{y_1+E_1}{\sin\alpha} \\ &= \frac{2D_1(x_1+D_1)+2E_1(y_1+E_1)}{2(D_1\cos\alpha+E_1\sin\alpha)}, \end{aligned}$$

således, på grund av (11),

$$d = \frac{D_1^2+E_1^2-F_1}{2(D_1\cos\alpha+E_1\sin\alpha)} \ldots\ldots\ldots (12)$$

Villkoret för transformationens möjlighet är

$$D_1\cos\alpha+E_1\sin\alpha \neq 0$$

eller, efter kvadrering,

$$D_1^2\cos^2\alpha+E_1^2\sin^2\alpha+D_1E_1\sin 2\alpha \neq 0,$$

således, på grund av (5), (6) och (7),

$$B_1D_1^2+A_1E_1^2-2C_1D_1E_1\neq 0$$

eller, efter multiplikation med $-(A+B)^3$,

$$2CDE-AE^2-BD^2\neq 0\,.$$

Adderas härtill $F(AB-C^2)=0$, blir villkoret

$$ABF+2CDE-AE^2-BD^2-FC^2\neq 0 \quad . \quad . \quad (13)$$

eller att ekvationens diskriminant skall vara $\neq 0$. Ett oändligt (eller obestämt) värde på d är således ett kriterium på ekvationens reduktibilitet.

För *ändligt* och *bestämt* värde på d föreställer ekvationen en parabel, vars styrlinje är

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-\frac{D_1^2+E_1^2-F_1}{2(D_1\cos\alpha+E_1\sin\alpha)}=0$$

eller

$$2(D_1\cos\alpha+E_1\sin\alpha)(x\cos\alpha+y\sin\alpha)=D_1^2+E_1^2-F_1$$

eller

$$(2D_1\cos^2\alpha+E_1\sin 2\alpha)x+(2E_1\sin^2\alpha+D_1\sin 2\alpha)y=D_1^2+\\+E_1^2-F_1\,,$$

således, på grund av (5), (6) och (7),

$$2(B_1D_1-C_1E_1)x+2(A_1E_1-C_1D_1)y=D_1^2+E_1^2-F_1$$

eller, efter multiplikation med $-(A+B)^2$,

$$2(CE-BD)x+2(CD-AE)y+D^2+E^2-F(A+B)=0\,. \quad (14)$$

Denna ekvation kan även skrivas under formen

$$2E(Cx-Ay)-2D(Bx-Cy)+D^2+E^2-F(A+B)=0$$

eller, då man har

$$\frac{C}{B}=\frac{A}{C}=\frac{Cx-Ay}{Bx-Cy},$$

under någon av följande 4 former:

$$\frac{Cx-Ay}{C}=\frac{Bx-Cy}{B}=\frac{D^2+E^2-F(A+B)}{2(BD-CE)}, \quad . \quad (14\,a)$$

$$\frac{Cx-Ay}{A}=\frac{Bx-Cy}{C}=\frac{D^2+E^2-F(A+B)}{2(CD-AE)} \quad . \quad . \quad (14\,b)$$

Brännpunktens koordinater äro enligt (8) och (9)

$$\begin{cases} x_1 = d\cos\alpha - D_1 = d\cos\alpha - \dfrac{D}{A+B}, \\ y_1 = d\sin\alpha - E_1 = d\sin\alpha - \dfrac{E}{A+B}. \end{cases} \quad \ldots \quad (15)$$

2. Avståndet från brännpunkten till styrlinjen är = halva parametern. Betecknas parametern, såsom vanligt, med $2p$, är således

$$\begin{aligned} p &= |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - d| \\ &= |D_1\cos\alpha + E_1\sin\alpha| \\ &= \sqrt{D_1^2\cos^2\alpha + E_1^2\sin^2\alpha + D_1E_1\sin 2\alpha} \\ &= \sqrt{B_1D_1^2 + A_1E_1^2 - 2C_1D_1E_1} \\ &= \sqrt{\frac{AE^2 + BD^2 - 2CDE}{(A+B)^3}}. \end{aligned}$$

Då nu

$$\frac{A}{C} = \frac{C}{B} = \frac{AE - CD}{CE - BD},$$

så är

$$\begin{aligned} AE^2 + BD^2 - 2CDE &= E(AE - CD) - D(CE - BD) \\ &= \frac{(AE - CD)^2}{A} = \frac{(CE - BD)^2}{B} \end{aligned}$$

och således

$$p = \left|\frac{CD - AE}{(A+B)\sqrt{A(A+B)}}\right| = \left|\frac{CE - BD}{(A+B)\sqrt{B(A+B)}}\right| \quad . \quad (16)$$

Av deduktionen framgår, att kvadraten på halva parametern är numeriskt = ekvationens diskriminant, dividerad med kuben på invarianten $A+B$.

3. Ekvationen för parabelns axel är

$$(x - x_1)\sin\alpha - (y - y_1)\cos\alpha = 0$$

eller, på grund av (15),

$$(x + D_1)\sin\alpha - (y + E_1)\cos\alpha = 0.$$

Förlänges ekvationen med $\sin\alpha$, erhålles på grund av (5) och (7)

$$A_1(x+D_1)+C_1(y+E_1)=0$$

eller, efter multiplikation med $(A+B)^2$,

$$(A+B)(Ax+Cy)+AD+CE=0, \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

vilken ekvation naturligtvis även kan skrivas under formen

$$(A+B)(Cx+By)+CD+BE=0 \quad . \quad . \quad . \quad (17\,a)$$

4. Ett översiktligare formelsystem erhålles, om man skriver den ursprungliga ekvationen under formen

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \quad . \quad . \quad (18)$$

Ekvationens diskriminant är då

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

där $a_{ki}=a_{ik}$, och man ser genast, att de i (14) ingående koefficienterna kunna uttryckas såsom enkla *hela* funktioner av underdeterminanterna. Betecknas, såsom vanligt, underdeterminanten till a_{ik} med A_{ik}, kan styrlinjens ekvation skrivas under den enkla formen

$$A_{13}x+A_{23}y-\tfrac{1}{2}(A_{11}+A_{22})=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Brännpunktens koordinater äro:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{A_{13}(A_{11}+A_{22})}{2(A_{13}^2+A_{23}^2)}-\dfrac{a_{13}}{a_{11}+a_{22}}, \\ y_1=\dfrac{A_{23}(A_{11}+A_{22})}{2(A_{13}^2+A_{23}^2)}-\dfrac{a_{23}}{a_{11}+a_{22}}. \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

För diskriminanten har man även uttrycken

$$A=-\frac{A_{23}^2}{a_{11}}=-\frac{A_{13}^2}{a_{22}}=-\frac{A_{13}^2+A_{23}^2}{a_{11}+a_{22}},$$

och parametern kan således även uttryckas genom formeln

$$p=\frac{\sqrt{A_{13}^2+A_{23}^2}}{(a_{11}+a_{22})^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

För att erhålla ekvationen för vertextangenten uppställa vi först ekvationen för den med styrlinjen parallella linjen genom brännpunkten. Ekvationen för denna linje är

$$A_{13}(x-x_1)+A_{23}(y-y_1)=0$$

eller

$$A_{13}x+A_{23}y-(A_{13}x_1+A_{23}y_1)=0.$$

Insättas uttrycken för x_1 och y_1 ur (21), erhålles

$$A_{13}x+A_{23}y=\tfrac{1}{2}(A_{11}+A_{22})-\frac{a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}}{a_{11}+a_{22}}$$

$$=\tfrac{1}{2}(A_{11}+A_{22})-\frac{A}{a_{11}+a_{22}},$$

och den sökta ekvationen för fokalkordan är således

$$A_{13}x+A_{23}y-\tfrac{1}{2}(A_{11}+A_{22})+\frac{A}{a_{11}+a_{22}}=0. \quad . \quad . \quad (23)$$

Ur (20) och (23) erhålles omedelbart ekvationen för vertextangenten:

$$A_{13}x+A_{23}y-\tfrac{1}{2}(A_{11}+A_{22})+\frac{A}{2(a_{11}+a_{22})}=0. \quad . \quad (24)$$

5. Det återstår nu endast att visa tillvägagångssättet vid diskussion av numeriska ekvationer. Härvid komma endast de i § 1 härledda formlerna till användning. Ett par exempel[1] skola tydliggöra förfarandet.

Exempel 1.

$$x^2+y^2+2xy+2x-3=0.$$

Vi ha här

$$A=1, \qquad D=1,$$
$$B=1, \qquad E=0,$$
$$C=1, \qquad F=-3.$$

Ekvationen för styrlinjen är således enligt (14)

$$2(0-1)x+2(1-0)y+1+0+3(1+1)=0$$

eller

$$2x-2y-7=0.$$

[1] Exemplen ur Collins lärobok.

Skrives denna ekvation under normalformen

$$\frac{2x-2y-7}{2\sqrt{2}}=0,$$

erhålles

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \sin\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ d=\frac{7}{4}\sqrt{2}.\end{cases}$$

Brännpunktens koordinater äro då enligt (15)

$$\begin{cases}x_1=d\cos\alpha-\dfrac{D}{A+B}=\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4},\\ y_1=d\sin\alpha-\dfrac{E}{A+B}=-\dfrac{7}{4}.\end{cases}$$

Ekvationen föreställer således en parabel med brännpunkten $(1{,}25\,,\ -1{,}75)$ och styrlinjen $x-y-3{,}5=0$.

Exempel 2.

$$144x^2+25y^2-120xy-1690x-4056y+28561=0.$$

Man har

$$\begin{aligned}A&=144\,, & D&=-845=-5\cdot 169\,,\\ B&=25\,, & E&=-2028=-12\cdot 169\,,\\ C&=-60\,, & F&=28561=169^2.\end{aligned}$$

Här är $D^2+E^2-F(A+B)=0$, $BD-CE\neq 0$, varav följer, att styrlinjen går genom origo. Dess ekvation är enligt (14 a)

$$Bx-Cy\sim 5x+12y=0.$$

På grund av $d=0$ får man då

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{D}{A+B}=5\,,\\ y_1=-\dfrac{E}{A+B}=12\,.\end{cases}$$

Ekvationen föreställer således en parabel med brännpunkten (5, 12) och styrlinjen $5x+12y=0$.

Exempel 3.

$$2x^2+8y^2+8xy-5x-10y+3=0.$$

Här är $CE-BD=CD-AE=0$. Ekvationen kan skrivas under formen

$$2(x+2y)^2-5(x+2y)+3=0,$$

varav

$$x+2y=\tfrac{5}{4}\pm\tfrac{1}{4}.$$

Den föreställer således två parallella räta linjer.

Beräkning av jordens form.

Av GUST. FORSSTRÖM.

Att jordmeridianerna på grund av avplattningen vid polerna approximativt utgöra ellipser torde omnämnas åtminstone på realgymnasiet, dock säkerligen utan bevis, enär ett dylikt anses ligga utom lärjungarnas räckvidd. Avstår man emellertid från kravet att få fram det exakta värdet på avplattningen, kan beviset göras enkelt nog, och då det dessutom väl gäller det enda ur naturen hämtade problem, som på samma gång det ansluter sig till skolkursen, utan vidlyftiga räkningar leder till en ellips, må det här upptagas till behandling.

Om jorden icke roterade kring sin axel, skulle ett axelsnitt uppenbarligen vara en cirkel (fig. 1). Men till följd av rota-

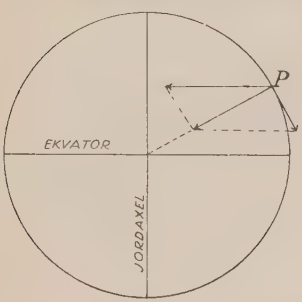


Fig. 1.

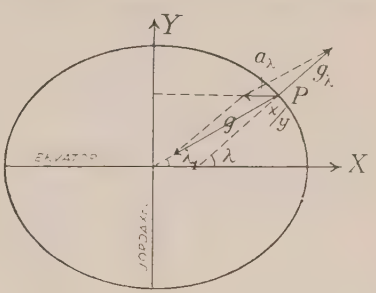


Fig. 2.

tionen kommer en godtycklig punkt P på den eftergivande jordytan att, såsom figuren antyder, drivas mot ekvatorn, och man erhåller en ny jämnviktsfigur (fig. 2), där excentriciteten för tydlighetens skull är ofantligt överdriven.[1]

[1] Ritades fig. 2 i riktig skala, skulle avvikningen från cirkelformen ej märkas.

Bokstäverna betyda

x/y=punkten P:s koordinater,

g=den geocentriska tyngdkraftaccelerationen vid latituden λ,

g_λ=den normalt mot jordytan verkande reaktionaccelerationen vid samma latitud,

a_λ=centripetalaccelerationen vid samma latitud.

Ur accelerationsparallellogrammen i fig. 2 fås ekv.

$$(1) \quad \frac{a_\lambda}{\sin(\lambda - \lambda_1)} = \frac{g}{\sin \lambda}.$$

Men

$$(2) \quad a_\lambda = \frac{4\pi^2 r \cos \lambda_1}{T^2} = kr \cos \lambda_1,$$

där

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2},$$

r=jordradien vid latituden λ,

T=jordens omloppstid kring axeln.

Man får således av (1) och (2)

$$\frac{kr}{g} = \frac{\sin(\lambda - \lambda_1)}{\sin \lambda \cos \lambda_1} = 1 - \frac{\cos \lambda \sin \lambda_1}{\sin \lambda \cos \lambda_1} = 1 - \frac{\operatorname{tg} \lambda_1}{\operatorname{tg} \lambda}.$$

Nu gäller tydligen

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = \frac{y}{x} \quad \text{och} \quad -\frac{1}{\operatorname{tg} \lambda} = y'.$$

Alltså fås

$$(3) \quad \frac{kr}{g} = 1 + \frac{yy^1}{x}.$$

Men som g enligt den allmänna gravitationslagen är omvänt proportionellt mot jordradiens kvadrat, kunna vi sätta

$$g = \frac{k_1}{r^2},$$

där k_1 är en konstant.

Härigenom övergår (3) till

$$\frac{k}{k_1} r^3 = \frac{x + yy'}{x}$$

eller, då ju $x^2 + y^2 = r^2$ och således $x + yy' = rr'$, till

$$\frac{r'}{r^2} = \frac{k}{k_1} x ,$$

varav

$$-\frac{1}{r} = \frac{k}{2k_1} x^2 + C ,$$

där C är en integrationskonstant.

För $x = 0$ är $r = r_p$ = polarradien, d. v. s. $C = -\frac{1}{r_p}$, vadan

(4) . . . . . $\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r} = \frac{k}{2k_1} x^2 .$

För $x = r_e$ = ekvatorsradien är även $r = r_e$, vadan

$$\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_e} = \frac{k}{2k_1} r_e^2$$

eller

$$\frac{r_e - r_p}{r_p} = \frac{k}{2k_1} r_e^3 = \frac{a_0}{2g_e} = \frac{2\pi^2 r_e}{T^2 g_e} ,$$

där g_e betecknar den geocentriska tyngdkraftaccelerationen vid ekvatorn. Insättes här ur Newcomb-Engelmanns »Populäre Astronomie»

$$r_e = 6\,378\,200 \text{ m.},$$
$$T = 86\,164 \text{ sek.},$$
$$g_e = g_0 + a_0 = 9{,}8\,1\,4 \ \tfrac{\text{m.}}{\text{sek.}^2},$$ [1]

[1] Den läsare, som till äventyrs erinrar sig min artikel »*Beräkning av månens massa*» (denna tidskrifts förra årgång, sid. 17—19) och anmärker på att jag där ej tagit någon hänsyn till jordrotationen, vill jag svara, att därstädes ej heller korrigerats för solens inverkan på månens rörelse kring jorden. Av en händelse kompensera dessa två störande faktorer varandra så fullständigt, att om i samma artikels formel (5) införes astronomernas noggranna värde 81,53 på förhållandet mellan jord- och månmassan, man får $g_{45} = 9{,}8062$ eller precis samma värde, som framgår ur *Helmerts* bekanta formel $g_\lambda = 9{,}7803 + 0{,}0518 \sin^2 \lambda$.

erhålles

$$\frac{r_e - r_p}{r_p} = \frac{1}{579}, \text{ som ger } \frac{r_e}{r_p} = \frac{580}{579} \text{ och } \frac{r_e - r_p}{r_e} = \frac{1}{580}.$$

(4) kan nu skrivas i formen

$$\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r} = \frac{r_e - r_p}{r_p r_e^3} x^2$$

eller

$$(4\,a) \quad . \quad . \quad . \quad (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r_p}\left(1 - \frac{r_e - r_p}{r_e^3} x^2\right),$$

d. v. s. den sökta kurvans ekvation blir av sjätte graden.

Vi skola nu visa, att (4 a) genom lämplig approximering kan reduceras till andra graden, och skriva fördenskull

$$z = \frac{r_e - r_p}{r_e^3} x^2,$$

där

$$0 \leqq z \leqq \frac{r_e - r_p}{r_e^3} r_e^2 = \frac{r_e - r_p}{r_e} = \frac{1}{580}.$$

Genom att införa z i (4 a), upphöja båda leden av denna ekvation till -2 och försumma termer, som innehålla den, i jämförelse med övriga, försvinnande lilla kvantiteten z^2, övergår (4 a) efterhand till[1]

$$\frac{x^2+y^2}{r_p^2} = \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-2z} = \frac{1+2z}{(1+2z)(1-2z)} = 1+2z =$$

$$= 1 + 2\frac{r_e - r_p}{r_e^3} x^2$$

eller

$$\left(\frac{1}{r_p^2} - 2\frac{r_e - r_p}{r_e^3}\right) x^2 + \frac{y^2}{r_p^2} = 1,$$

där det gäller att förenkla koefficienten för x^2-termen.

Fördenskull skriva vi i korthet

$$\frac{r_e - r_p}{r_e} = \frac{1}{580} = f,$$

[1] Binomialteoremet antas bekant blott för positiva heltalsexponenter.

som ger

$$\frac{r}{r_e}=1-f \text{ och } \frac{1}{r_p^2}=\frac{1}{r_e^2}\cdot\frac{1}{(1-f)^2}=\frac{1}{r_e^2}(1+2f)$$

med iakttagande av samma approximationsgrad för f som nyss i fråga om z.

Vår x^2-koefficient förenklas sålunda till

$$\frac{1}{r_e^2}(1+2f)-\frac{2f}{r_e^2}=\frac{1}{r_e^2},$$

varför den sökta kurvans ekvation slutligen får den enkla formen

$$\frac{x^2}{r_e^2}+\frac{y^2}{r_p^2}=1.$$

Härmed är bevisat, att en godtycklig meridian med mycket god approximation utgör en ellips och jorden i sin helhet alltså en vid polerna avplattad rotationsellipsoid med jordaxeln till rotationsaxel och med avplattningen

$$\frac{r_e-r_p}{r_e}=\frac{1}{580}.$$

Jämföres detta teoretiskt funna värde på avplattningen med det genom uteslutande gradmätningar erhållna, som enligt Newcombs i det föregående anförda arbete är $\frac{1}{298}$, befinnes det förra vara endast omkring hälften så stort som det senare. Denna stora avvikelse kan så mycket mindre orsakas av ovan gjorda, för övrigt fullt berättigade approximationer, som siffervärdet på $\frac{r_e-r_p}{r_e}$ ju beräknats, innan dessa approximationer började. Det låga värdet på avplattningen måste således bero på att i fig. 2 accelerationen g riktats mot jordens medelpunkt, som om den graviterande jordmassan kunde i vårt problem tänkas samlad i denna punkt, vilket — som bekant — strängt gäller blott för en fullt sfärisk form på jorden.

Om *cgs*-systemets dimensionslära.

Av OTTO GALLANDER.

Upphovsmännen till *cgs*-systemet gingo, som bekant, ut från grundenheterna centimeter, gram och sekund och fingo sedan enheter för övriga storheter genom att i lämpliga formler giva proportionalitetsfaktorn värdet 1. De olika storheternas dimensioner bestämdes därigenom att åtskilliga proportionalitetsfaktorer gjordes dimensionslösa. Bland proportionalitetsfaktorer, som fingo dimensioner, var den, som ingår i gravitationsformeln. Gravitationskonstanten fick så dimensionerna $M^{-1}L^3T^{-2}$. Hade även denna konstant gjorts till en dimensionslös etta, hade systemet ej behövt mer än 2 godtyckligt valda enheter. Väljas till dessa längd- och tidsenheterna, får massa dimensionerna L^3T^{-2}. Enheten för massa skulle då enligt *cgs*-systemets definitionssystem bliva följande: enheten för massa är den, som på en lika stor massa på 1 cm avstånd utövar en så stor kraft, att denna skulle giva samma massa accelerationen 1 cm/sek.^{2} Att man ej kan få en så stor massa i form av ett klot, så att avståndet mellan deras medelpunkter blir 1 cm, betyder ju intet. Då man känner gravitationskonstanten, kan man lätt beräkna sambandet mellan den så definierade massenheten och massenheten gram, och en tiomiljondel av en dylik enhet skulle blivit användbar i ett »praktiskt system». Anledningen till att ej denna massenhet antogs var väl den, att gravitationskonstanten var bestämd med så liten noggrannhet. Det skulle haft för dyrbara konsekvenser, om den »praktiska» massenheten ofta behövt ändras alltefter det gravitationskonstanten blev noggrannare bestämd.

Att i ett dylikt system två sådana storheter som elek-

tricitetsmängd och specifikt motstånd skulle få samma dimensioner i det elektromagnetiska systemet hade givetvis ej vållat några betänkligheter hos dem, som mäta självinduktioner och längder med samma mått.

Om man efter behag gör proportionalitetskonstanter i fysiska formler till dimensionslösa ettor, skulle man kunna taga till tidsenhet den tid en punkt på ekvatorn rör sig en cm på grund av jordens rotation kring sin axel. Tiden skulle då mätas i cm, och jordens ekvator, mätt i cm, skulle angiva, hur många cm (tid) som motsvara ett stjärndygn. I detta system skulle hastighet vara en dimensionslös storhet.

Men låt oss lämna dylika fortsättningar av *cgs*-systemets strävan att reducera antalet av varandra oberoende enheter och se på några konsekvenser av systemet självt.

Då enheten för elektricitetsmängd skulle fastslås, hade man ej en aning om, vad elektricitet var. Man hade då två olika formler att välja på, nämligen Coulombs lag och Biot-Savarts lag. En dimensionslös etta i stället för proportionalitetsfaktorn i Coulombs lag ledde, som bekant, till det elektrostatiska systemet, och i Biot-Savarts lag till det elektromagnetiska. Att samma storheter i dessa båda system fingo olika dimensioner generade ej *cgs*-systemets upphovsmän. De satte blott in dimensionslösa ettor i de båda omnämnda formlerna i stället för proportionalitetskonstanterna, oaktat det väl legat mycket nära till hands att låta Coulombs lag få dimensioner på sin proportionalitetskonstant lika väl som konstanten i Newtons gravitationsformel tilldelades dimensioner.

Dubbelheten i dimensioner på samma storhet i de båda nämnda systemen och möjligheten att efter behag förfoga över proportionalitetsfaktorers dimensioner visar godtyckligheten vid val av utgångspunkter.

I elektrostatiska systemet äro dimensionerna för elektricitetsmängd $L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$ och i det elektromagnetiska $L^{1/2}M^{1/2}$. Enligt elektronteorien äro båda systemen lika oriktiga.

Då man ej kan separera en elektrons massa från dess

elektricitetsmängd, kan man ju anse elektronens elementarkvantum elektricitet som en egenskap hos elektronen eller — och detta är i grund och botten detsamma — att elementarkvantum negativ elektricitet har en viss massa. Denna massa har man kunnat uppmäta. En elektrisk ström är enligt elektronteorien en mängd elektroner, som passera genom ett tvärsnitt av en ledare. Hade *cgs*-systemets upphovsmän vetat, vad vi nu veta, skulle de måhända ha definierat enheten för elektrisk ström på följande sätt:

Strömstyrkan är ett, då genom ett tvärsnitt av ledaren per sekund gå 1 gr elektroner, vilkas massa reduceras till elektroner i vila.

Denna definition vore principiellt ej sämre än *cgs*-systemets. Ingendera duger för en praktisk fysiker vid kontroll av mätinstrument. Han måste vid båda nämnda definitioner för dylikt ändamål hålla sig till strömmens elektrolytiska verkan och sedan betjäna sig av en empirisk konstant, som med oerhörd möda bestämmes med allt större noggrannhet, och allteftersom denna konstant bleve känd med större noggrannhet, finge han göra nya korrektionstabeller för sina instrument och räkna om diverse konstanter inom fysiken. Det var just dylika synpunkter, som ledde 1908 års internationella kongress i London att frångå *cgs*-systemets definitioner på ampère och Ohm, då denna kongress — i stället för att justera det 1893 i Chicago antagna värdet på en ampères (10^{-1} *cgs*-enhet) förmåga att på en sek. utfälla 1,118 mg silver till 1,1183 mg — definierade en ampère som den ström, som på en sek. utfäller 1,11800 mg silver, samt då den gjorde motsvarande ändring i definitionen på Ohm (ej 1,0628 m[1] utan 1,06300 m kvicksilverpelare av konstant genomskärningsarea och uppgiven vikt och temperatur).

Genom kongressbeslutet i London 1908 ha vi fått två nya grundenheter, och därmed äro olägenheterna med *cgs*-

[1] Denna konstant bestämdes som bekant 1862 av en kommission tillsatt av British Association med mer än 1 % fel, ändrades av kongressen i Paris 1884 till 1,06 och kongressen i Chicago 1893 till 1,063.

systemet vad beträffar de elektriska enheterna avlägsnade, och då man nu kommit till insikt om att en enhets viktigaste egenskap är att vara lätt och skarpt reproducerbar, kan man vara lugn för att ej något slikt införes, som den ovan framkastade definitionen på enhet för strömstyrka.

Utginge man vid fastställandet av de elektriska storheternas definitioner från elektronteorien och således gåve den elektriska strömmen dimensionerna MT^{-1}, är tillfälle till godtycklighet dock ej uteslutet.

Joules lag kan uttryckas genom formeln:

$$W = kVIt.$$

Då elektrisk spänning är orsaken till elektronernas rörelseförändring resp. framdrivande trots »friktion», skulle fysiska synpunkter kräva, att man gåve V samma dimensioner som kraft, d. v. s. MLT^{-2}. W:s dimensioner äro ML^2T^{-2}. Låter man i enlighet med elektronteorien I:s dimensioner vara MT^{-1}, erhålles dimensionerna för k i Joules lag att vara $M^{-1}L$.

Skrives Ohms lag $R = \frac{V}{I}$, erhållas dimensionerna för elektriskt motstånd $\frac{MLT^{-2}}{MT^{-1}} = LT^{-1}$, således samma dimensioner som i det elektromagnetiska systemet. På samma sätt finner man dimensionerna för övriga elektriska storheter.

Gör man åter som *cgs*-systemets upphovsmän, skulle man låta k i Joules lag vara dimensionslös och får då V:s dimensioner att vara L^2T^{-2}. Dimensionerna för motstånd bliva i detta system $M^{-1}L^2T^{-1}$.

Dylika dimensionsspekulationer hava ej stor praktisk betydelse för det internationella ampère-ohm-systemet.

Endast termen voltampère, som användes vid angivandet av storleken hos generatorer, motorer och transformatorer beröres härav. Då voltampèretalet multiplicerat med $\cos\varphi$ (φ = fasförskjutningen mellan spänning och ström) ger effekten, kräver denna terminologi, att proportionalitetsfaktorn i Joules lag är dimensionslös. Men denna term kunde sak-

löst strykas ur den elektriska litteraturen. Man kan vid fråga om en leverans ej nöja sig med att angiva antalet voltampère utan måste dessutom alltid angiva volttalet. Det vore väl då naturligare att även angiva maximala ampèretalet och så komma ifrån termen voltampère.

I två fall har dimensionsläran lett till användning av enheter, som ej äro av godo. Enligt det elektromagnetiska systemet blir självinduktionens dimension L och enligt det elektrostatiska blir kapacitetens dimension L. Detta har länge föranlett fysiker att mäta självinduktioner i cm, oaktat man ej kan bestämma en självinduktion endast genom att mäta en längd. Inom radiolitteraturen ser man ofta ej blott självinduktioner utan även kapaciteter mätas i cm. Vederbörande författare tänka då ej på att de i samma kapitel valt enheter från två olika måttsystem, vilka kräva reduktionsfaktorer vid övergång från det ena till det andra eller till ampère-ohm-systemet. Nybörjare få dessutom den falska föreställningen, att en självinduktion och en kapacitet skulle vara storheter av samma slag, då de kunna mätas med samma enhet.

Av det sagda torde framgå, att *cgs*-systemet ej blott är godtyckligt vad de elektriska och magnetiska storheterna beträffar, utan även direkt strider mot vår tids uppfattning av elektricitetens natur. Det är förvånansvärt, att tvenne dylika system ännu inflyta i fysiska läroböcker som aktuell fysik, och att framstående fysiker fortfarande betjäna sig av konsekvenser ur dessa system vid val av enheter för självinduktioner och kapaciteter.

Kristallografien i gymnasiets kemikurs.

Av NILS ALSÉN.

I en recension över Gertz och Grönvalls Mineral- och bergartslära uttalas den meningen, att »avdelningen om kristallsystemen gott kunnat tryckas med petitstil — såvida den icke helt kunnat undvaras». Rec. torde här ha givit uttryck åt en allmän uppfattning: man har mycket kort tid att disponera för mineralogien överhuvudtaget, och det lilla, som man kan medhinna av kristallografien, även om man anslår åtskilligt mer tid än som i regel är brukligt, blir rena minnessaker och ger ingen verklig kunskap.

Man får nog medge, att med den traditionella lärogången i kristallografi denna uppfattning är riktig. Men å andra sidan måste man anse, att det sista decenniets atomforskning motiverar det kravet, att realgymnasiets abiturienter få i skolan lagd en bärande grund i kristallografi, den moderna atomfysikens viktigaste hjälpvetenskap. Det gäller då att lösa problemet, hur en elementär framställning skall läggas, för att eleverna skola inse, vilken säregen kropp en kristall är. Detta resultat kan icke nås genom några timmars sysslande med kristallmodeller, såsom nu i regel sker.

Undervisningen i kristallografi på skolstadiet synes mig först och främst ha till uppgift att inpränta den geometriska regelbundenheten i kristallernas byggnad, deras »symmetri». Man bör därvid begagna en sådan lärogång, att man vid framställningen icke behöver stödja sig på modeller utan kan utgå från en kristall, vilken som helst, sådan som den bildats i naturen eller på laboratoriet. I annat fall kommer framställningen att lida av det kardinalfelet, att satserna

härledas för idealiserade kroppar, vartill naturen sällan ger motsvarighet. Det är att begära för mycket, att eleverna omedelbart skola inse det berättigade i att överföra resonemanget från dessa modeller till verkliga kristaller. Tvärtom torde en vaken lärjunge skarpt reagera mot att tillskriva de ofta synnerligen oregelbundet utbildade kristallerna symmetriplan och andra symmetrielement, som härletts för modellerna, och stannar inför en dualism modell—kristall.

Det synes mig, som om man genom användning av s. k. gnomonisk kristallprojektion kommer helt från denna svårighet. Då icke denna tidskrifts alla läsare torde ha tillgång till en modern lärobok i kristallografi, vill jag här i korthet redogöra för densamma.

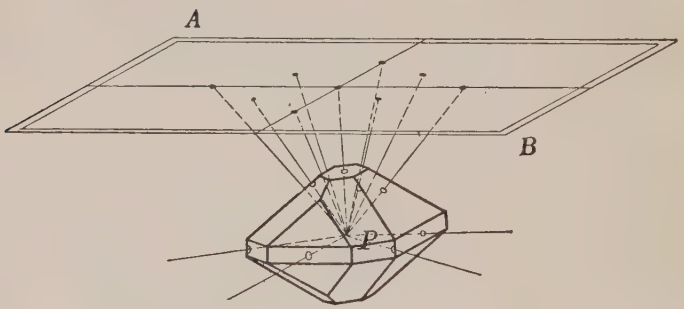


Fig. 1.

a) ***Teoretisk framställning*** (fig. 1). Ifrån en godtycklig punkt *P* inuti en kristall fällas normaler mot kristallytorna (eller deras förlängningar) och utdragas, tills de träffa projektionsplanet *AB*. Detta kan visserligen läggas hur som helst, men i vanliga fall väljer man det parallellt med en viktig kristallyta, t. ex. såsom på figuren en basyta, eller vinkelrätt mot en viktig kristallografisk riktning, t. ex. en prismakant. För att åskådliggöra metoden kan man skaffa sig en kristallavbildning utskuren ur en potatis och genom långa nålar markera ytnormalerna.

b) ***Praktiskt utförande.*** 1) *Grövre metod* med användning av en tvåkretsig kontaktgoniometer (fig. 2). Denna består av en vid en fot fastsatt vertikal cirkel *FG* med gradering såsom fig. visar. Kring en genom *FG*:s medelpunkt gående vertikal axel är en horisontell cirkel *AB* rörlig, och med denna är det lilla stativet *E*, varpå kristallen fästes, förbundet genom en kulled. Den vertikala cirkeln är försedd med en löpare *L*, genom vilken staven *CD* med kontaktplattan *CI* kan skjutas fram och tillbaka utmed en radie till cirkeln.[1]

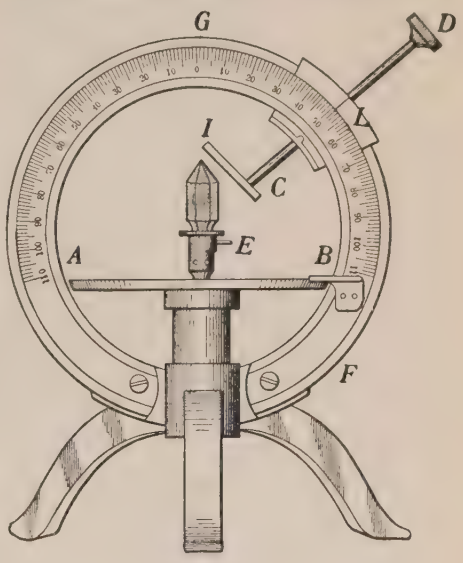


Fig. 2.

Goniometern avser att genom två vinkelkoordinater bestämma kristallytans läge. Därvid vrides den horisontella cirkeln och löparen på den vertikala, till dess man får kontaktplattan att noga sammanfalla med den yta, vars koordinater skola bestämmas. Ytnormalen från den vertikala cirkelns medelpunkt, som blir den godtyckligt valda punkten inuti kristallen, kommer då att sammanfalla med *CD*, och ytans koordinater kunna avläsas vid *L* (polavstånd $= \alpha$) och *B* (längd $= \beta$). Man må observera den stora överensstämmelsen med ortsbestämningen på jorden — dock polavstånd i st. f. geografisk bredd.

2) *Noggrannare metod* med användning av en tvåkretsig reflexionsgoniometer. Den skiljer sig i princip icke i något avseende från den föregående men ger mycket noggrannare värden. Tabellen upptar en observationsserie

[1] Det här avbildade instrumentet är förfärdigat hos Fritz Rheinheimer, Landfriedstr. 6, Heidelberg.

Tabell.

Yta	Kvadrant	β Observationer	β Reduc. till I kvadrant	α	Yta	Kvadrant	β Observationer	β Reduc. till I kvadrant	α
l	II	136° 37′	43° 23′	89° 56′	*d*	I	61° 59′	61° 59′	34° 27′
m	»	128° 24′	51° 36′	90° 00′		II	117° 33′	62° 27′	34° 17′
M	»	117° 50′	62° 10′	89° 48′		III	242° 19′	62° 19′	34° 20′
	I	62° 06′	62° 06′	90° 00′		IV	298° 14′	61° 46′	34° 14′
	»	43° 19′	43° 19′	90° 11′		I	62° 03′	62° 03′	45° 48′
g	»	32° 37′	32° 37′	90° 17′		II	117° 41′	62° 19′	45° 41′
b	»	0° 02′	0° 02′	90° 16′		III	242° 17′	62° 17′	45° 25′
	IV	316° 42′	43° 18′	90° 02′		IV	297° 42′	62° 18′	45° 36′
	»	297° 53′	62° 07′	89° 52′		I	62° 06′	62° 06′	64° 06′
	III	242° 09′	62° 09′	89° 57′		II	117° 44′	62° 16′	63° 53′
	»	223° 25′	43° 25′	90° 11′		III	242° 13′	62° 13′	63° 41′
f	I	0° 34′	0° 34′	43° 45′		IV	297° 55′	62° 05′	63° 53′
y	II	179° 53′	0° 07′	43° 29′		I	62° 06′	62° 06′	76° 27′
	I	0° 08′	0° 08′	62° 19′		II	137° 48′	62° 12′	76° 34′
d	I	179° 56′	0° 04′	61° 52′		III	242° 09′	62° 09′	75° 58′
	IV	89° 52′	89° 52′	61° 08′		IV	297° 55′	62° 05′	76° 11′
		270° 08′	89° 52′	60° 53′					

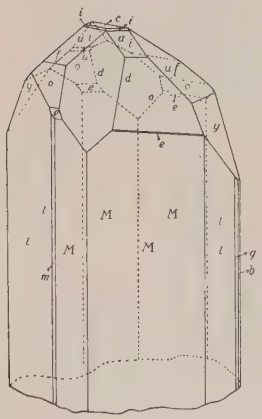


Fig. 3.

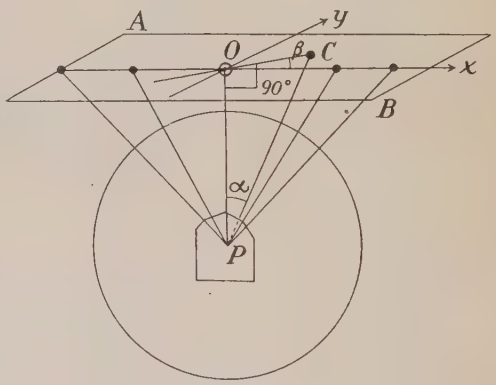


Fig. 4.

på en topaskristall (fig. 3) med användning av detta instrument.

Under förutsättning att planet *AB* tänkes lagt parallellt med basytan, d. v. s. vinkelrätt mot en prismakant, fås med användning av tabellen den gnomoniska projektionen

på följande sätt. En godtycklig punkt O (fig. 4) väljes till basytans pol och samtidigt till projektionens medelpunkt och en linje OX tages till utgångsriktning. Sedan avsättas mot denna de avlästa β-värdena, varefter ytpolernas lägen på vinkelbenen erhållas genom en enkel räkning. Ur fig. 4

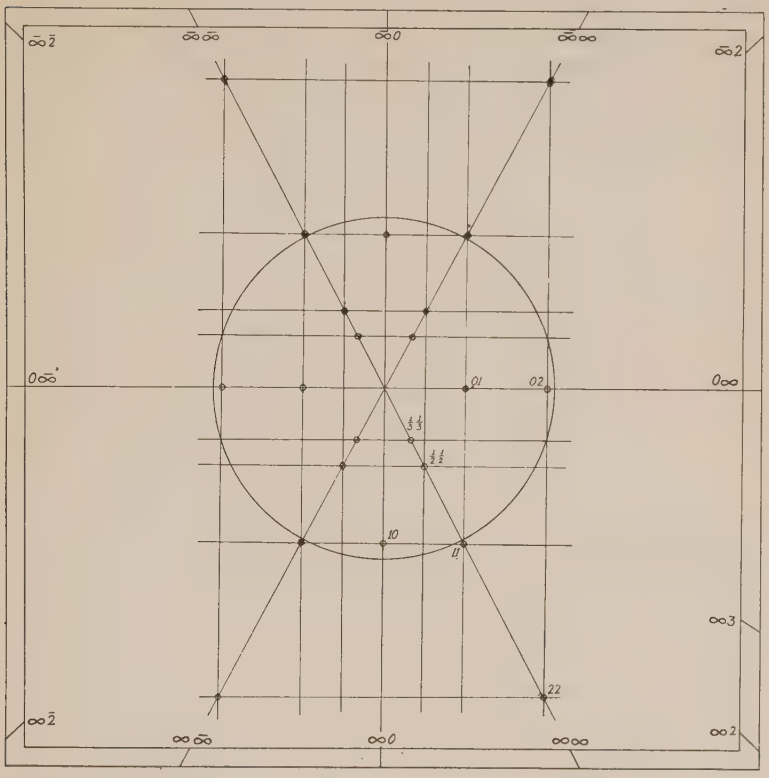


Fig. 5.

fås nämligen $OC = OP \operatorname{tg} \alpha$. OP väljes godtyckligt, i detta fall = 5 cm, och α-värdet tages ur tabellen. Fig. 5 ger den fullständiga projektionen av topaskristallen i fig. 3.

Ur densamma kunna följande slutsatser omedelbart dragas.

a 1) *Projektionen har två symmetrilinjer*, som hos kristallen motsvaras av två symmetriplan vinkelräta mot basytan.

a 2) *Genom O går en tvåtalig symmetriaxel, vinkelrät mot basytan*, vilket innebär att en viss punkt upprepas efter ett halvt varvs vridning.

b) *Vissa ytors projektionspunkter ordna sig i räta linjer, zoner.* Dessa ytors skärningslinjer äro sinsemellan parallella såsom framgår av fig. 3.

c) *Förhållandet mellan två projektionspunkters x-koordinater är ett enkelt rationellt tal. Detsamma gäller om y-koordinaterna.* (Lagen om enkla rationella indices eller parameterlagen.) Kristallens viktigaste egenskaper kunna således direkt utläsas ur den gnomoniska projektionen.

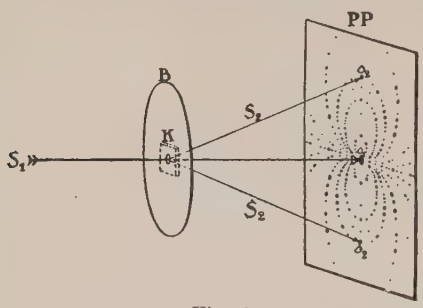


Fig. 6.

Genom v. Laues och hans medhjälpares upptäckt av röntgenljusets interferens vid passagen genom en kristall har det blivit möjligt att på ett ännu mera eklatant sätt demonstrera kristallens regelbundna byggnad. Såsom engelsmannen W. L. Bragg först uppvisat, kunna röntgenljusinterferenserna tolkas som reflexer mot atomplanen, vilka i sin tur äro möjliga kristallytor. Ett lauediagram utgör alltså en reflexprojektion av kristallens ytor, dels sådana som kommit till utbildning i kristallens yttre, dels sådana som finnas latenta hos densamma (fig. 6). Experimentet utföres så, att ett smalt knippe röntgenljus får infalla mot en jämförelsevis tunn kristall eller nedslipad kristallplatta ofta med strålriktningen vinkelrätt mot kristallens basyta. Reflexerna tagas upp på en plåt, som är ställd parallell med basytan. Den största delen av röntgenknippet går rätlinigt fram och åstadkommer en kraftig centralfläck. Då denna på grund av sin styrka verkar störande, hindrar man ofta centralknippet genom en liten blyplatta från att komma fram till plåten (fig. 9, 14, 15). Mot varje atomplan hos kristallen inträder reflexion, och

den reflekterade strålen åstadkommer en svärtning på plåten. Omvänt motsvaras varje fläck på plåten av ett atomplan, d. v. s. en i verkligheten utbildad eller möjlig kristallyta. Denna projektionsmetod är av allra största värde med hänsyn till den fylliga bild den ger av kristallernas symmetriegenskaper helt och hållet oberoende av deras yttre begränsning. Jag hänvisar till fig. 9—15,[1] vilka i det avseendet torde tala för sig själva, och vill bara framhäva, att även denna projektions punkter ordna sig i zoner, som emellertid blott i vissa gränsfall äro räta linjer och eljest ellipser, hyperbler och parabler.

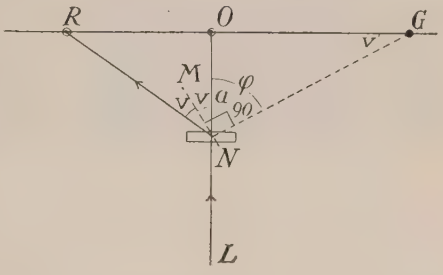


Fig. 7.

Detta senare är i vissa avseenden en olägenhet i jämförelse med den gnomoniska projektionen, och därför överför man gärna reflexprojektionen till en gnomonisk projektion. Till grund härför ligger det enkla samband, som äger rum mellan punkterna i de båda olika projektionerna, och som genast faller i ögonen på fig. 7. Kristallplattan tänkes ganska tunn, så att dess tjocklek kan försummas i förhållande till plåtens avstånd från kristallen. LO är det infallande röntgenstrålknippet, som åstadkommer dels en central fläck vid O och dels en svagare fläck vid R på grund av reflexionen mot atomplanet MN. R är alltså ytan MN:s reflexprojektion och G är dess gnomoniska projektion, om man låter projektionsplanet och plåten sammanfalla. Ur fig. fås

$$OR = a \operatorname{tg} 2v = a \cot 2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

$$\text{och } OG = a_1 \operatorname{tg} \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Överföringen från reflex- till gnomonisk projektion tillgår därför så, att man på den fotografiska plåten, vars av-

[1] Efter laueplåtar, tagna vid Stockholms högskolas röntgenlaboratorium av prof. G. Aminoff.

stånd a från kristallen är känt, mäter OR, varefter φ beräknas. Sedan insättes detta i 2), varvid OG erhålles — projektionsradien a_1 väljes vanligen $= 5$ cm. I övrigt hänvisas till fig. 8, som visar, hur en fjärdedel av ett lauediagram av KCl överförts till en gnomonisk projektion.

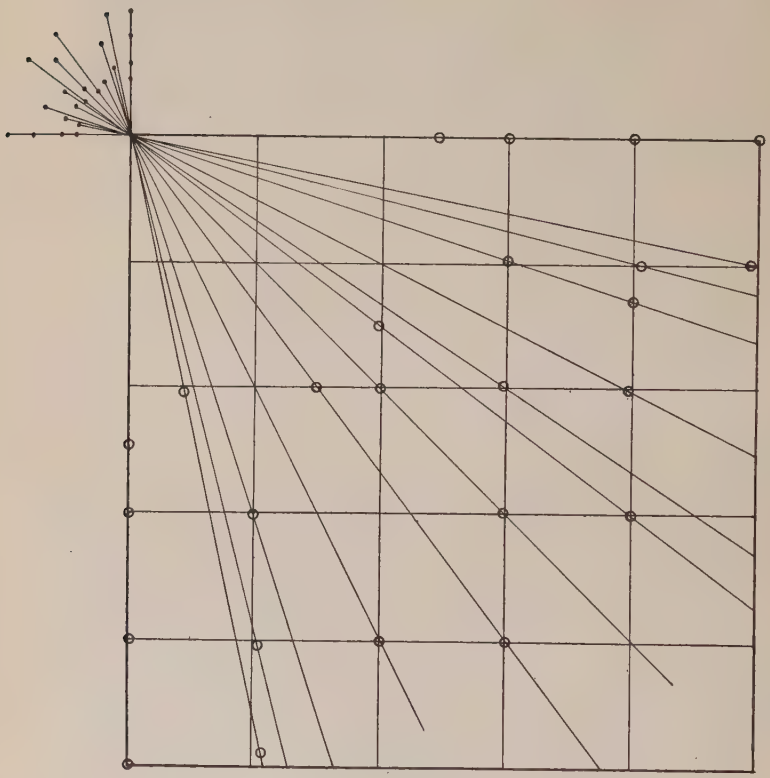


Fig. 8.

Först sedan man med gnomonisk projektion och lauediagram kunnat visa upp en kristalls symmetriegenskaper alldeles oberoende av dess yttre mer eller mindre regelbundna form, kan det vara tid att övergå till modellerna med deras regelbundenhet med avseende på den yttre be-

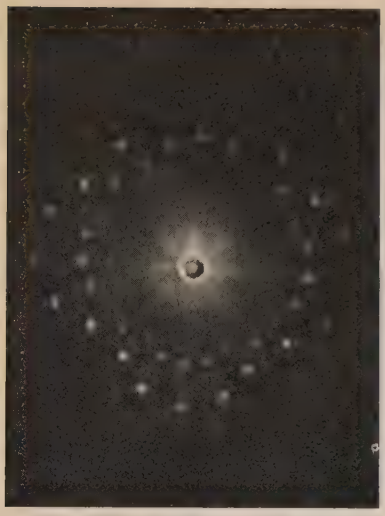


Fig. 9.
KCl. Strålknippet ⊥ en kubyta. 4 symmetrilinjer.

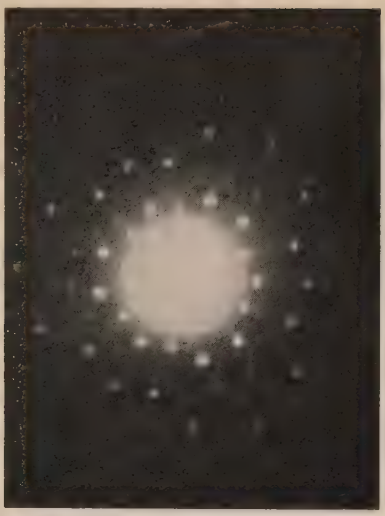


Fig. 10.
KCl. Strålknippet ⊥ en oktaederyta. 3 symmetrilinjer.

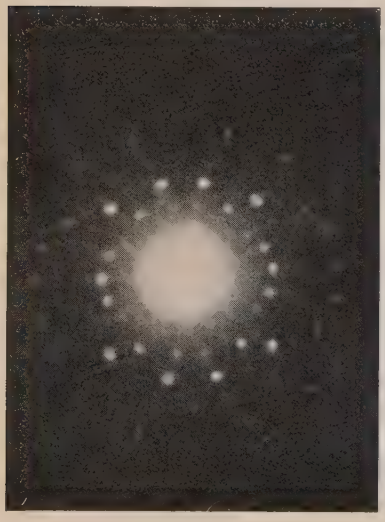


Fig. 11.
KCl. Strålknippet ⊥ en romboederyta. 2 symmetrilinjer.

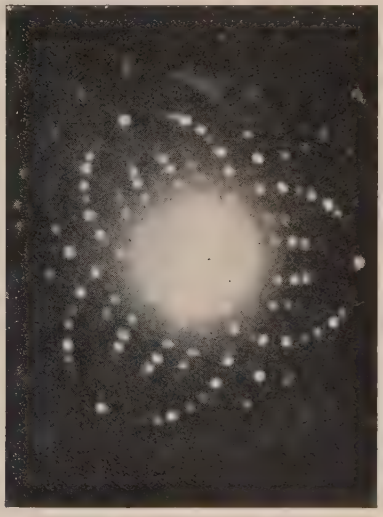


Fig. 12.
Flusspat. Strålknippet ⊥ en oktaederyta. 3 symmetrilinjer.

Fig. 13.
Topas. Strålknippet ⊥ basytan.
2 symmetrilinjer.

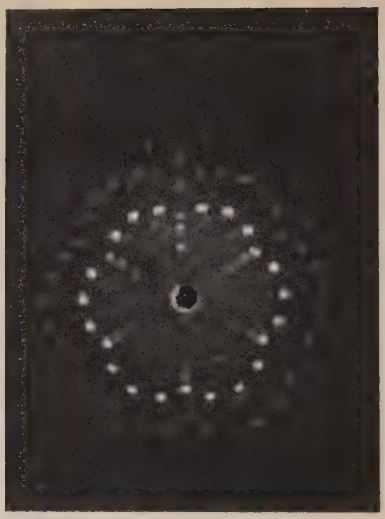


Fig. 14.
Parisit. Strålknippet ⊥ basytan.
6 symmetrilinjer.

Fig. 15.
Kristall tillhörande monoklina systemet. 1 symmetrilinje.

gränsningen och därjämte till de olika kristallsystemen, så långt tiden kan medge.

Klart är, att den skisserade lärogången kräver icke så få timmar utöver vad man för närvarande brukar anslå åt läran om kristallerna på kemilektionerna. Det torde bli svårt för kemien ensam att avstå den behövliga tiden i det nuvarande gymnasiet. Lättare bleve det väl i det av Skolkommissionen föreslagna. Har man i en klass jämte kemi även fysik eller matematik, torde man redan nu kunna få det behövliga tillskottet genom att från dessa ämnen låna ett par timmar. För sig själv kan man ju motivera detta därmed, att å ena sidan kristallografi genomgås för att stödja studiet av atom*fysiken*, och att å den andra den innebär — tagen såsom jag föreslår — en viss övning i rymdåskådning och trigonometrisk beräkning.

Kemiska notiser.

Av G. STARCK.

VI. Om framställningen av klor.

I femte realskoleklassen möter problemet att klargöra saltsyregasens sammansättning. Vid inverkan av zink på saltsyra erhålles väte; detta väte kan ej härstamma från vattnet, ty med vatten enbart ger zink under liknande betingelser ingen vätgas. Alltså är saltsyregasen en förening av väte med ett eller möjligen flera obekanta grundämnen. Vid inverkan av zink på saltsyra har tydligen zinken, som förtäres, förenat sig med denna rest och frigjort vätet; för att få den andra delen fri, bör man i stället behandla syran med ett ämne, som förenar sig med vätet. Vilket ämne: jo syre eller ett oxidationsmedel. Och här tillgripes den klassiska, sedan Scheeles tid i orubbat bo sittande brunstenen. Mera tilltalande synes vara att använda det oxidationsmedel, varmed eleverna äro förtrogna, nämligen luftens syre. Kan man då oxidera saltsyra med luft? Det omedelbara svaret blir nej, ty saltsyran är i luft oföränderlig; redan sättet varpå den förvaras visar detta. Nu kan man emellertid genom ett konstgrepp verkligen åstadkomma en oxidation av saltsyra med syre, och så följer det försök, varmed författaren ersätter klorframställningen medelst brunsten.

En luftström eller, ännu bättre, syrgasström ledes genom en tvättflaska fylld med rykande saltsyra och blandningen av luft och saltsyregas genom konc. svavelsyra. Härifrån ledes gasblandningen genom ett glasrör med ett hoprullat platinableck och slutligen till botten av en tom cylinder. I denna lägges ett blått lackmuspapper. I början färgas

detta rött av saltsyreångorna. Uppvärmes nu platinan — till knapp glödgning — iakttages först och främst vattenbildning i glasröret och därpå, ehuru långsammare, att lackmuspapperet blekes, att en intensiv klorlukt framträder och slutligen även, om ock svagt, gasens gröna färg. Därmed är saltsyrans sammansättning klargjord.

Det är sålunda Deacons klorprocess, som på detta tidiga stadium demonstreras, ehuru katalysatorn är en annan. Det torde ej kunna förnekas, att oxidationen av klorvätet här utföres på ett mycket genomskinligare sätt än vad vanligen är fallet. Begreppet katalys bör ej möta några svårigheter, när katalysatorn som här är ett ämne, som eleverna antingen känna till eller i varje fall utan tvekan acceptera som ett grundämne och vars oföränderlighet är iögonfallande. Inom parentes nämnt, är det en fördel att kunna öka antalet platinakatalyser, som ju icke äro alltför många på skolkursen, med ännu ett fall.

Återstår att framställa klor för att kunna utföra de vanliga försöken därmed, ty givetvis är ovanstående ingen framställningsmetod för klor. Här spela de pedagogiska synpunkterna mindre roll, huvudsaken är att man har en lättsköttklorapparat, ständigt i ordning, lika lätt att hantera som en vätgasapparat. Lösen blir alltså: bort med brunstenen, vars framställning säkert har åstadkommit mera arbete, förargelse, kostnad och skada än de flesta andra demonstrationsförsök. Nu föres i handeln klorkalk, pressad i tärningar för beskickning av Kipps eller liknande apparater. Enligt min erfarenhet är Kipps apparat ej den lämpliga typen för klorgasutveckling, emedan den befinner sig under tryck och klorkalken, även då apparaten ej användes, ganska hastigt förtäres. Lämpligare är att reglera klorgasströmmen genom tilldroppande av saltsyra. En enkel, effektiv klorapparat göres av ett tubulerat torktorn. Tuben förses med gummipropp och kranrör för klorkalciumlösningens avtappande, i bottnen av den övre delen lägger man en perforerad porslinsskiva, däröver klorkalk och överst ännu en porslinsskiva för syrans jämna fördelning. Den övre

mynningen tillslutes med en gummipropp, försedd med en liten separertratt för syran och ett avledningsrör utan kran.

VII. Molekylarviktsbestämning som laborationsövning.

Den apparat för molekylarviktsbestämning enligt V. Meyer, som författaren beskrivit i denna tidskrift, sept. 1921, är på grund av sin tämligen komplicerade konstruktion så pass dyr i tillverkning, att dess anskaffande torde bereda många läroanstalter svårigheter. Som apparat för laborationsövningar torde den ingenstädes kunna ifrågakomma. Då det måste anses önskvärt att kunna utföra molekylarviktsbestämningar laborationsvis, har jag sökt och även lyckats förenkla apparaten så väsentligt, att den icke torde ställa sig dyrare än den ursprungliga Meyerska. Den är därjämte minst lika bekväm i handhavandet och ger lika goda resultat som den tidigare beskrivna apparaten.

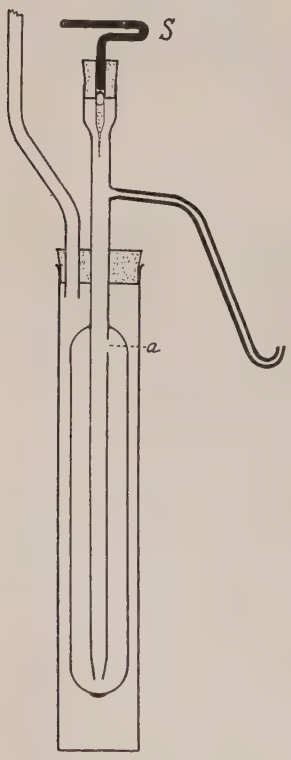
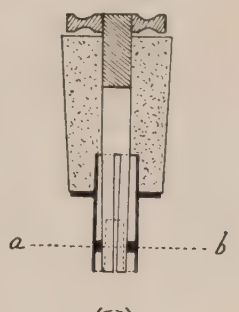


Fig. 1.

Konstruktionen framgår av bifogade fig. 1, där mantelröret är 50 × 300 mm och övriga dimensioner i proportion härtill. Karakteristiskt är fortfarande det till botten räckande fallröret. Den inre cylindern är borttagen och den yttre förlängd, så att den fyller nästan hela mantelröret. I fallröret är upptaget ett hål *a*, varigenom luften drives ut. Då vågröret med substansen träffar botten, avbrytes

spetsen, och substansen förgasas; vågröret självt kilar sig fast (icke alltför bokstavligt!) i den koniska förträngningen, och luften tar vägen genom hålet *a*. Det s. k. städet är borttaget och i stället cylinderns botten något förstärkt rakt under fallröret. Ny är fallinrättningen, som i sin förenklade form ersätter den dyrbara kranen. Två fallinrättningar finnas att välja emellan. Vid den enklare sätter man fast vågröret i den genomborrade korken, på sätt fig. 1 visar. Då försöket skall börja skjuter man fram den förut något tillbakadragna glasstaven *S*, varigenom röret bringas att falla. I den andra (fig. 2) fasthålles vågröret av en uppslitsad mässingshylsa, liknande de gamla pennskyddarna, vars fjädrande delar klämmas ihop medelst en yttre fast hylsa, som verkar på två klackar på den inre delen. Vrider man det inre röret medelst den ovanför korken fastsatta brickan $^1/_4$ varv från figurens läge, komma klackarna mittför var sin öppning i den yttre hylsan, varvid vågröret frigöres.[1] Vilken fallinrättning man än väljer, är det synnerligen lämpligt att paraffinera korkarna.



a–b
Fig. 2.

Vid lärjungelaborationer torde endast vatten ifrågakomma som badvätska; kylare är då överflödig och ersättes av ett enkelt stigrör.

Apparaten torkas bäst omedelbart efter avslutat försök, medan den ännu är varm, på så sätt, att man nedför ett till fallrörets nedre ända räckande glasrör, nedtill försett med en helt kort ligatur. Vid sugning kommer luftströmmen att passera genom hålet *a* och spolar ut cylindern.

Följande resultat ha erhållits med denna apparat: för ren bensol molekylarvikten 77,16, 78,96, 80,19, 79,60, 78,22, 78,61, medeltal 78,79, beräknat 78,05. För kloroform 120,9,

[1] Konstruktion och utförande av maskinist H. Berggren, Norra reallärоverket i Stockholm.

119,5, medeltal 120,2, beräknat 119,5. För etylacetat 87,52, 90,01, medeltal 88,76, beräknat 88,06.

VIII. Kvantitativ förbränning av flyktiga organiska föreningar som skolförsök.

I det första häftet av denna tidskrifts första årgång har jag i korthet angivit en metod att förbränna flyktiga organiska substanser i och för bestämning av kol och väte. Principen var den, att en syrgasström ledes genom en liten vägd flaska, innehållande det flyktiga ämnet; den med substansen mättade syrgasen går sedan genom ett förbränningsrör med kopparoxid, varefter på vanligt sätt följa klorkalciumrör och kaliapparat. Substansens vikt erhålles genom tillbakavägning av nämnda flaska efter försöket. De mindre tillfredsställande resultat, som jag under de följande åren erhållit, hava föranlett mig att underkasta metoden en granskning. Förbränningsröret hade vid dessa försök den form, som fig. 1 utvisar, och är tillverkad av hårdsmält

Fig. 1.

glas. *a* är ett kapillärrör, 150×7 mm, *b* ett rör, 140×12 mm, fyllt med kornig kopparoxid, *c* ett avledningsrör, 80×5 mm. Röret är inlagt i ett tunnväggigt järnrör *d*, som upphettas av 4 radbrännare. Kapillärröret förhindrar explosion av syrgas-substansblandning, som i och för sig är explosiv; i *c* ligger en koppartråd, så lång, att den går in i klorkalciumapparatens kula, och med uppgift att förhindra kondensation av vattenånga i förbränningsrör och ligatur. Absorptionsapparaterna voro båda av Roos' modell, den ena fylld med kornigt klorkalcium, den andra med sönderstött, fast kali.

Några resultat, erhållna med fullt ren bensol, må här återgivas:

Bensol	C	H	C+H	C:H		
g	%	%	%			
—	92,25	7,75	100,00	11,90	beräknade	värden.
0,0841	91,12	7,60	98,72	11,99	»	»
0,1160	90,41	7,80	98,21	11,59	»	»
0,0981	90,20	7,48	97,68	12,05	»	»
0,1948	90,80	7,73	98,53	11,75	»	»
0,1715	89,97	7,56	97,53	11,90	»	»
0,0754	90,41	7,69	98,10	11,76	»	»
0,1246	89,74	7,51	97,25	11,95	»	»

Tiden för förbränningen varierade mellan 75 och 300 min., men hade ingen påvisbar inverkan på resultaten. Förklaringen till förlusterna i kol och väte ligger i den sista kolumnen, som visar, att med något undantag förhållandet C : H ganska väl överensstämmer med det beräknade. Detta antyder, att felet ligger i bensolvikten och att bensol gått förlorad på grund av någon dold bristfällighet i bensolflaskan eller i sättet för bensolens dosering. I stället valdes nu en anordning, vid vilken hela den uppvägda bensolmängden förbrändes, och redan det första försöket att ersätta bensolflaskan med det i fig. 2 avbildade röret kröntes med framgång.

Fig. 2.

Röret böjes av 6 mm glasrör, utblåses i knäet och utdrages hårfint i ändarna. Den utblåsta kulan göres så stor, att den upptager hela den invägda substansmängden, emedan denna eljest lätt i vätskeform drives ut av syrgasen, vilket måste förhindras. Röret igensmältes på ena sidan, väges, upplagt på lämplig ställning, beskickas med sub-

stans, igensmältes och väges ånyo. Den vätska, som alltid samlar sig i kapillärrören, destillerar man genom försiktig uppvärmning ned i kulan av samma skäl, som nyss anfördes. Nu insättes röret försiktigt, så att spetsarna ej avbrytas, i ligaturerna till å ena sidan syregasometerns torkapparat, å andra sidan förbränningsröret, som av denna anledning (fig. 1) har en icke-kapillär avslutning.

Förbränningen i sin helhet tillgick på följande sätt. Ligaturen vid den sista torkapparaten för syrgasen förenades medelst ett kort glasrör med förbränningsröret, inlagt i sitt järnrör. Syrgas påsläpptes och förbränningsröret upphettades. Under tiden vägdes absorptionsapparaterna, beskickades och vägdes substansröret. Absorptionsapparaterna tillkopplades, det nyssnämnda korta förbindningsröret utbyttes mot substansröret på ovan angivet sätt, varvid syrgasströmmen upphörde. Därpå avbrötos de båda kapillära spetsarna inuti ligaturerna, varvid syrgasströmmen ånyo kom i gång och förbränningen omedelbart vidtog. Syrgasströmmens hastighet var i försöken 150 à 200 blåsor per min. och tiden för förbränningen $1^1/_2$ à 2 tim., motsvarande en syreåtgång av cirka 2 lit. Under själva förbränningen behöver apparaten ingen annan tillsyn än eventuellt påfyllning av vatten i gasometern. Med den angivna syrgasströmmen och de analyserade vätskornas kokpunkt ($\sim 80°$) var substansröret tomt efter 40 min., men naturligtvis måste gasströmmen pågå mycket längre.

Följande tabell återger resultat, erhållna vid förbränning av bensol och etylacetat:

		C	H	C+H	C:H
	g	%	%	%	
Bensol	0,0753	92,64	7,73	100,37	11,99
	0,1049	92,15	7,67	99,82	12,01
	0,0948	92,11	7,77	99,88	11,86
Etylacetat	—	54,50	9,15	beräknade värden	
	0,0888	54,49	9,09		
	0,1045	54,34	9,04		

Värden äro för skolbruk acceptabla. Försök att pressa ned tiden hava utförts, men resultaten bliva därigenom ej fullt pålitliga. Något demonstrationsförsök i vanlig mening är försöket ej, men då apparaten sköter sig själv, kan man exempelvis göra så, att man ställer i ordning apparaten i laboratoriet och börjar försöket i klassens närvaro. Efter tillräckligt lång tid, som kan lämpas efter omständigheterna och som man helt kan ägna åt andra sysselsättningar, gör man själv de avslutande vägningarna.

Etylacetat synes vara något lättare att förbränna än bensol. Det är därför värdefullt, att även etylacetat har en formel $(C_2H_4O)_2$, som är en multipel av den enklaste genom analysen erhållna, och att molekylvikten lätt och säkert kan bestämmas i den i föregående uppsats beskrivna apparaten, såsom kontrollförsök givit vid handen.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

En modifikation av »Molls fallapparat».

I denna tidskrifts första årgång, häfte 3, fanns en uppsats av lektor Moll med överskrift: »En metod att registrera vägarna vid fallförsök.» Ett sammanställande av en sådan apparat, som där beskrives, medför ju emellertid en viss utgift, om skolan ej äger någon metronom. Jag har fördenskull sökt ersätta metronomen med en pendel (i fig. 1 betecknad med *P*).

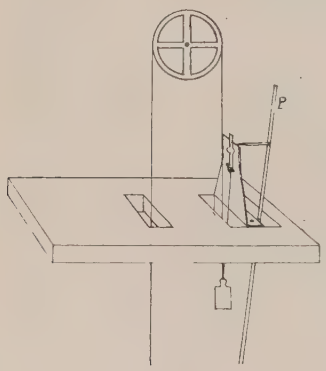


Fig. 1.

Som pendel tjänstgör en 78 cm lång koppartråd av 5 mm tjocklek. Axeln utgöres av en bit av en strumpsticka, som går genom ett 2 mm:s hål 14 cm från övre änden. Pendeln är fästad på ännu ett stycke av en strumpsticka, fastlött i ett hål 3 cm från pendelns övre ände. För att pendelns axel skall sitta stadigt fast kan man bekläda sidorna av utskärningen i träplattan med mässingsplåt. Trissan är fästad vid en träplatta, fastskruvad vid fotplattan.

På figuren är pendeln ritad i sned riktning. Då ett försök skall göras, är det nämligen lämpligt att föra den ur jämviktsläget med hjälp av en tråd, genom vars avbrännande rörelsen utlöses.

I övrigt är allt lika med apparaten i ovannämnda uppsats. Då man egenhändigt kan tillverka alla delar med

undantag av trissan, som dock torde finnas att tillgå på varje fysikum, blir apparaten mycket billig.

Pendelns rörelser kunde möjligen göras jämnare och resultaten bli bättre än med den ovan beskrivna anordningen, om axeln fastlöddes vid pendeln och försåges med spetsar, som finge röra sig i koniska urholkningar i metallskruvar. Som färgvätska är tusch att föredraga.

Till sist resultaten av ett par försök, utförda vid Karlskrona flickgymnasium. (Då märkena varit långa, har tagits medeltalet av avstånden mellan tvenne märkens början och samma märkens slut. Man räknar blott med vartannat märke.)

Tabell 1.

väg $= v$	tid $= t$	t^2	$\frac{v}{t^2}$
4,7	1	1	4,7
19,8	2	4	4,95
44,7	3	9	4,97
80,3	4	16	5,02
126,5	5	25	5,06
177,0	6	36	4,92
244,8	7	49	5,00

Tabell 2.

väg $= v$	tid $= t$	t^2	$\frac{v}{t^2}$
5,9	1	1	5,9
22,0	2	4	5,50
48,3	3	9	5,37
85,1	4	16	5,32
133,0	5	25	5,32
191,9	6	36	5,33

H. Stenmark.

Matematiska uppgifter.

169) Att upprita en triangel, då man känner bissektrisen till en vinkel, samt höjderna mot de omfattande sidorna.

Iter.

170) I varje triangel är den inskrivna cirkelns radie mindre än eller lika med hälften av den omskrivnas.

M—r.

171) Visa att, om α är en spetsig vinkel, så är

$$\cos\alpha \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} \leqq \frac{1}{8}.$$

M—r.

172) Visa att $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = -1$.

173) För vilka x-värden blir x^2+30x en jämn kvadrat?

174) En cirkel har diametern $AB=2r$. Från A fälles en linje AS vinkelrät mot cirkelns plan och lika med AB. På periferin tages en punkt M. Visa att tetraederna $SABM$ begränsas av fyra rätvinkliga trianglar, och sök läget av den omskrivna sfärens medelpunkt.

Lösningar till uppg. i häft. 3. 1923—24.

157) *Uttryck avståndet mellan medelpunkterna till en triangels omskrivna och inskrivna cirklar såsom funktion av dessa cirklars radier.*

Låt ABC (fig. 2) vara den givna triangeln, O den omskrivna, I den inskrivna cirkelns medelpunkt. ED den mot

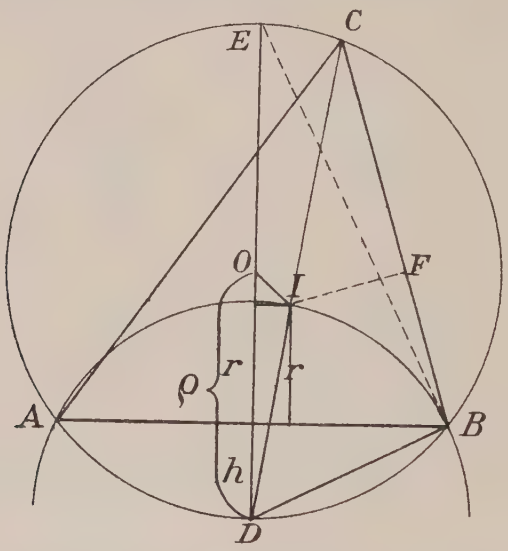


Fig. 2.

AB vinkelräta diametern i cirkeln O. Då ligger I på den cirkel genom A och B som har D till medelpunkt. Således $DI=DB=\sqrt{2\varrho h}$. Man får då ur $\triangle OID$

$$\overline{OI}^2=\varrho^2+2\varrho h-2\varrho(r+h)=\varrho^2-2r\varrho.$$

Om I_a är den vidskrivna cirkelns medelpunkt, så fås på samma sätt

$$\overline{OI_a}^2 = \varrho^2 + 2\varrho r_a .$$ Löst av *X*.

Följande variant av lösningen gör cos-teoremet överflödigt.

Ur likformigheten av trianglarna *BDE* och *FIC* följer att

$$BD \cdot IC = FI \cdot DE = 2\varrho r .$$

Men $BD \cdot IC$ eller $DI \cdot IC$ är punkten *I*:s potens med avseende å cirkeln *O*.

Således $(\varrho + OI)(\varrho - OI) = 2\varrho r$

eller $\overline{OI}^2 = \varrho^2 - 2\varrho r .$ *X*.

158) *Att upprita en triangel, då man känner två höjder och den inskrivna cirkelns radie.*

Den tredje höjden kan konstrueras, ty

$$2T = 2rp = \frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}} = \frac{2p}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}$$

$$\because \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} .$$

Då fås en triangel likformig med den sökta genom att konstruera tre sidor a_1, b_1, $c_1 = \frac{k^2}{h_a}, \frac{k^2}{h_b}, \frac{k^2}{h_c}$. Sedan förstoras denna så att en av höjderna blir av given storlek.

Möjlighetsvillkor: Vardera höjden måste vara större än cirkelns diameter, men denna större än halva harmoniska mediet mellan höjderna. Löst av *X*.

159) *Om en aritmetisk serie har det hela talet a till första term och primtalet d till differens, så finnes bland dess termer, om deras antal tages tillräckligt stort, alla termer i serien* a, a^d, a^{d^2}, . . . a^{d^p}.

Enär $d^p - 1$ är delbart med $d - 1$, så kan man sätta

$$d^p - 1 = k(d-1), \text{ där } k \text{ är helt tal.}$$

Av samma skäl är

$$a^{k(d-1)}-1=(a^{d-1})^k-1=k_1(a^{d-1}-1).$$

Vi få då:

$$a^{d^p}-a=a(a^{d^p-1}-1)=a(a^{k(d-1)}-1)=ak_1(a^{d-1}-1).$$

Men enligt en sats av Fermat är $a(a^{d-1}-1)\equiv 0 \pmod{d}$.

Således $a^{d^p}=a+xd$. Löst av *X* och *Iter.*

160) *I ett rätvinkligt koordinatsystem är given en cirkel, som tangerar y-axeln i origo O. På x-axeln tages en punkt A och på y-axeln en punkt B. Genom AB:s skärningspunkter med cirkeln dragas tangenter, som skära y-axeln i P och Q. Visa att*

a) $OP\cdot OQ$ är konstant då AB vrider sig kring A, och

b) $\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}$ är konstant då AB vrider sig kring B.

I. *Elementärt bevis.*

A:s koordinater $(a, 0)$, *B*:s $(0, b)$, *AB*:s vinkelkoefficient k, cirkelns radie r. *AB*:s skärningspunkter med cirkeln (x_1, y_1) och (x_2, y_2).

Lätt inses att $\frac{OP}{r}=\frac{x_1}{y_1}$ och $\frac{OQ}{r}=\frac{x_2}{y_2}$. Då är

$$OP\cdot OQ=\frac{r^2x_1x_2}{y_1y_2}=\frac{r^2x_1x_2}{k^2(x_1-a)(x_2-a)}=$$

$$=\frac{r^2x_1x_2}{k^2[x_1x_2-a(x_1+x_2)+a^2]}$$

och

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{y_1}{rx_1}+\frac{y_2}{rx_2}=\frac{x_2y_1+x_1y_2}{rx_1x}=$$

$$=\frac{x_2(kx_1+b)+x_1(kx_2+b)}{rx_1x_2}=\frac{2kx_1x_2+b(x_1+x_2)}{rx_1x_2}=$$

$$=\frac{2k}{r}+\frac{b}{r}\cdot\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}.$$

Men ur cirkelns ekvation $(x-r)^2+y^2=r^2$ och linjens, som antingen kan skrivas

$$y=k(x-a) \text{ eller } y=kx+b,$$

fås genom elimination

dels $\quad x^2(1+k^2)-2x(r+k^2a)+k^2a^2=0,$

dels $\quad x^2(1+k^2)-2x(r-kb)+b^2=0,$

således $\begin{cases} x_1x_2 = \dfrac{k^2a^2}{1+k^2}, \\ x_1+x_2=2\cdot\dfrac{r+k^2a}{1+k^2} \end{cases}$ eller $\begin{cases} x_1x_2 = \dfrac{b^2}{1+k^2}, \\ x_1+x_2=2\cdot\dfrac{r-kb}{1+k^2} \end{cases}$

Genom insättning härav fås då

$$OP\cdot OQ=\frac{ar^2}{a-2r}, \quad \frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{2}{b},$$

varav satsen följer.

II. *Annan lösning.*

a) Utgår man från en punkt på y-axeln såsom P, är Q entydigt bestämd, och omvänt kommer man *entydigt* till P, om man utgår från den så bestämda punkten Q. Alltså äro P och Q par i en involution på y-axeln. Då O tydligen motsvaras av oändlighetspunkten, emedan AB då sammanfaller med x-axeln, så är $OP\cdot OQ$ konstant. Om OP och OQ uppfattas såsom P:s och Q:s ordinator, så blir konstanten positiv om A ligger utom cirkeln, negativ i motsatt fall.

Anm. Satsen gäller även om cirkeln ersättes med en annan konisk sektion, som tangerar y-axeln i origo, och A ligger på diametern genom O.

b) B har samma polar med avseende å cirkeln och med avseende å den koniska sektion som bildas av tangenterna till cirkeln i skärningspunkterna med AB, och denna polar går genom O. Således ligga O och B harmoniskt i förhållande till P och Q, varav

$$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{2}{OB},$$

varest OP och OQ äro räknade med tecken. Även här gäller anm. till föregående. *X* och *Iter.*

161) *Avgör hur många reella lösningar mellan 0 och 2π fås av ekvationen $\cos 2x = 2a \cos x$ för olika värden på a.*

Lösning I. Sätta vi

$$f(x) = \cos 2x - 2a \cos x$$
$$= 2(\cos^2 x - a \cos x - \tfrac{1}{2}) = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

och antaga $a = \alpha + \beta i$, sönderfaller (1) i

$$\begin{cases} \cos^2 x - \alpha \cos x - \frac{1}{2} = 0, \\ \beta \cos x = 0, \end{cases}$$

varav $\beta = 0$. Det första villkoret är således, att *a är ett reellt tal.*

Införes vidare beteckningen

$$y = \cos x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

erhålles ur (1)

$$\varphi(y) = y^2 - ay - \tfrac{1}{2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diskriminanten till (3) är

$$a^2 + 2 > 0,$$

varav framgår, att (3) *alltid har reella rötter.* Man ser vidare, att rötternas produkt är negativ, varav följer, att (3) alltid har en rot $y_1 > 0$ och en rot $y_2 < 0$. På grund av (2) kunna emellertid endast sådana rötter användas, som ligga inom intervallet

$$-1 \leqq y \leqq 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ur relationen

$$y_1 y_2 = -\tfrac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

erhålles följande schema över rötternas relativa storlek:

$$0 < y_1 \leqq \tfrac{1}{2}, \qquad y_2 \leqq -1,$$
$$\tfrac{1}{2} \leqq y_1 \leqq 1, \qquad -1 \leqq y_2 \leqq -\tfrac{1}{2},$$
$$y_1 \geqq 1, \qquad -\tfrac{1}{2} \leqq y_2 < 0.$$

Man finner således, att (3) alltid har åtminstone en rot inom intervallet (4) Det återstår därför endast att under-

söka för vilka värden på a *båda rötterna* ligga inom detta intervall. Härför erfordras tydligen, att rötterna till ekvationen

$$\varphi(y-1)=y^2-(a+2)y+a+\tfrac{1}{2}=0$$

äro $\geqq 0$ och att rötterna till ekvationen

$$\varphi(y+1)=y^2-(a-2)y-(a-\tfrac{1}{2})=0$$

äro $\leqq 0$. Villkoren härför äro

$$\begin{cases} a+\tfrac{1}{2}\geqq 0, \\ a-\tfrac{1}{2}\leqq 0, \end{cases}$$

således att a ligger inom intervallet

$$-\tfrac{1}{2}\leqq a\leqq\tfrac{1}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Mot varje y-värde inom intervallet (4), utom för $y=-1$, svara två x-värden inom intervallet $(0, 2\pi)$. Resultatet av undersökningen kan därför sammanfattas sålunda:

För alla a-värden inom det nedåt öppna intervallet

$$-\tfrac{1}{2}<a\leqq\tfrac{1}{2}$$

finnas 4 reella x-värden, för $a=-\tfrac{1}{2}$ *finnas 3 reella x-värden, och för alla andra a-värden finnas 2 reella x-värden.*

Iter.

Lösning II. Man konstruerar kurvan

$$a=\frac{\cos 2x}{2\cos x} \text{ för } 0\leqq x\leqq 2\pi.$$

$$\frac{da}{dx}=-\frac{\sin x(1+2\cos^2 x)}{2\cos^2 x}; \quad \frac{da}{dx}=0 \text{ för } x=k\cdot\pi.$$

Då x växer från 0 till $\frac{\pi}{2}$ avtar således a från $\frac{1}{2}$ till $-\infty$

» » » » $\frac{\pi}{2}$ » π » » a » $+\infty$ » $-\frac{1}{2}$

» » » » π » $\frac{3\pi}{2}$ växer » a » $-\frac{1}{2}$ » $+\infty$

» » » » $\frac{3\pi}{2}$ » 2π » » a » $-\infty$ » $+\frac{1}{2}$.

(Då a tar samma värde för x och $2\pi - x$ är kurvan symmetrisk med avseende på $x=\pi$; då x och $\pi - x$ ge olika tecken men samma absoluta belopp på a, har kurvan en symmetripunkt i $x=\frac{\pi}{2}$, $a=0$.)

Av fig. 3 följer genast:

$a > \frac{1}{2}$: två lösningar inom intervallet,
$\frac{1}{2} > a > -\frac{1}{2}$: fyra » » »
$-\frac{1}{2} > a$: två » » »

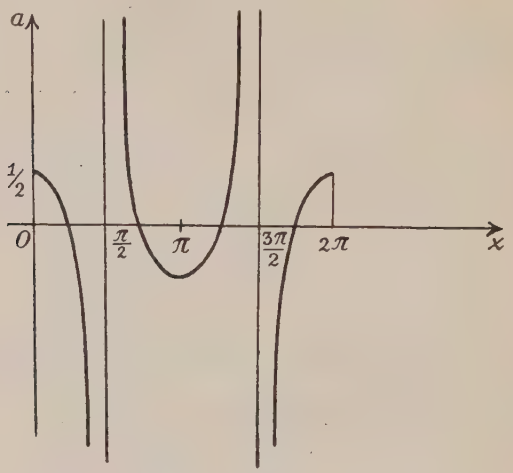


Fig. 3.

För $a=\frac{1}{2}$: två lösningar inom intervallet, två i gränserna,
» $a=-\frac{1}{2}$: tre » , varav den dubbla $x=\pi$. X.

162) *Att upprita en rätvinklig triangel, då de inskrivna cirklarnas radier i de trianglar, vari triangeln delas av medianen från den räta vinkelns spets, äro givna.*

Om triangeln är ABC (fig. 4 a) och vinkeln vid B kallas φ, den större av radierna r, den mindre r_1, så inses genast ur figuren, att

$$\frac{a}{2} = \frac{r + \frac{r}{\sin\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{r_1 + \frac{r_1}{\cos\varphi}}{\sin\varphi}.$$

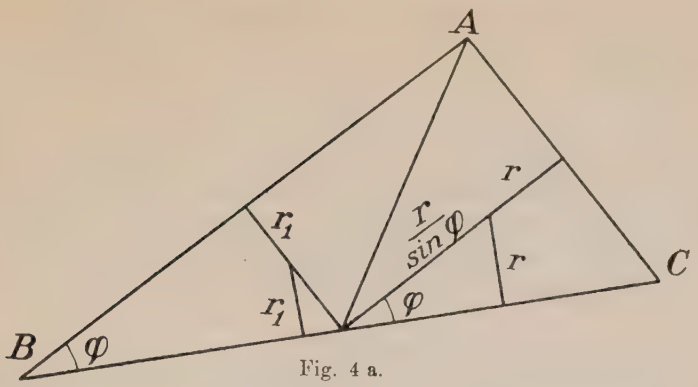


Fig. 4 a.

Således $r \sin \varphi + r = r_1 \cos \varphi + r_1$.

Sättes då $\frac{r_1}{r} = \operatorname{tg} \alpha$, så fås

$$\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi = \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{r - r_1}{\sqrt{r^2 + r_1^2}}.$$

Således $$\sin (\alpha - \varphi) = \frac{r - r_1}{\sqrt{r^2 + r_1^2}}.$$

Vinkeln φ konstrueras då sålunda (fig. 4 b).

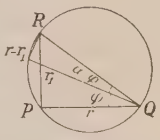


Fig. 4 b.

Upprita en rätvinklig triangel PQR med kateterna $PQ = r$ och $PR = r_1$ samt omskriv den med en cirkel. Från R inpassas i den mindre bågen RP kordan $RS = r - r_1$. Vinkeln RSQ blir då $= \alpha - \varphi$ och vinkeln $SQP = \varphi$. Sedan sker konstruktionen lätt genom förstoring.

Möjlighetsvillkor: $r < 2r_1$. Löst av *X, Iter, C. P.*

Prisuppgift för 1924—25

för lärjungar vid allm. läroverk, tekniska skolor o. d.

A är ett tresiffrigt tal, där första siffran är mer än en enhet större än den sista. A′ är det tal som uppkommer då siffrorna skrivas i motsatt ordning. $B = A - A'$, B' det tal som upp-

kommer då siffrorna i B skrivas i motsatt ordning. Vad blir $B+B'$*?*

Lös detta problem, och utsträck det till tal med flera siffror.

Tävlan står öppen för alla lärjungar vid allmänna läroverk, seminarier, tekniska skolor och med dessa likställda enskilda läroverk. Tävlingsskrift insändes före den 1 mars 1925. Den tävlandes namn, läroanstalt och klass meddelas. Prenumeration å tidskriften fordras ej för deltagande i tävlan.

Om lämpliga tävlingsskrifter inkomma, utdelas tre pris, bestående av värdefulla arbeten i matematik eller fysik med hänsyn tagen till pristagarens önskan.

Red.

Approximationsmetoder till ekvationen $x^n = a - bx$.

Av HENRIK PETRINI.

I.

Om man vill bestämma de reella rötterna till ekvationen

(1) . . . . . $x^n + bx + a = 0$,

så kan man nöja sig med att bestämma endast positiva rötter till ekvationer av formen (1). De negativa rötterna får man nämligen, om man utbyter x mot $-x$, varvid en ekvation av samma form (1) erhålles. Uppgiften reduceras då till att bestämma den eller de positiva rötterna till en ekvation av någon av formerna

(2) . . . . . $x^n = a + bx$

(3) . . . . . $x^n = -a + bx$

(4) . . . . . $x^n = a - bx$,

där a och b äro positiva. Förut[1] har jag visat huru man i varje fall kan använda två av fyra likartade approximationsmetoder på ekvationerna (2) och (3) Det gäller nu att gripa sig an med ekv. (4).

För att finna antalet positiva rötter till ekv. (4) skriva vi den under formen

(5) . . . . . $x^n + bx = a$.

När x växer från 0 till ∞, så växer vänstra ledet i ekv. (5) ständigt och kontinuerligt från 0 till ∞ och antar alltså varje positivt värde en gång. Ekv. (5) har således alltid en

[1] Tidskrift för elem. mat., fysik och kemi, årg. 1923—24, h. 4, s. 219—226 och årg. 1924—25, h. 1, s. 1—7 resp.

och blott en reell positiv rot. Av (4) framgår omedelbart

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} x < \dfrac{a}{b} \text{ och} \\ x < a^{\frac{1}{n}}. \end{cases}$$

Första approximationsmetoden.

Skriver man ekv. (4) under formen

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad x = \sqrt[n]{a - bx}$$

och startar med begynnelsevärdet $x=0$ i högra ledet, så blir approximationsförfarandet

$$(8) \quad \ldots \quad x_1 = \sqrt[n]{a}, \quad x_2 = \sqrt[n]{a - bx_1}, \quad x_3 = \sqrt[n]{a - bx_2},$$
$$x_4 = \sqrt[n]{a - bx_3} \text{ etc.}$$

För att x_2 skall vara reellt och positivt måste bx_1 vara $< a$,

$\therefore\ b\sqrt[n]{a} < a$, alltså villkoret

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad a^{n-1} > b^n.$$

Av (8) följer omedelbart

$$x_2 < x_1, \quad x_3 > x_2, \quad x_3 < x_1,$$

$\because\ x_4$ reellt och positivt och $< x_3$ men $> x_2$. Generellt fås

$$(10) \quad \ldots \begin{cases} \dfrac{a}{b} > x_1 > x_3 > x_5 > \ldots, \quad x_{2\nu-1} > x_{2\nu+1} \\ x_2 < x_4 < \ldots\ldots, \quad x_{2\nu-2} < x_{2\nu} \end{cases}$$

Vidare är enligt (7) och (8) $x_1 > x$, $x_2 < x$, $x_3 > x$ etc. och i allmänhet

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad x_{2\nu+1} > x > x_{2\nu}.$$

Sättes

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} x_{2\nu} = u \\ \lim\limits_{\nu=\infty} x_{2\nu+1} = v, \\ \because\ \dfrac{a}{b} > v \geqq x \geqq u, \end{cases}$$

så fås

$$(13) \quad \ldots \quad \begin{cases} u^n = a - bv \\ v^n = a - bu, \end{cases}$$

$$(14) \quad \ldots \quad \therefore \; u^n = a - b\sqrt[n]{a - bu}$$

med en liknande ekvation för v. Tydligen måste även x satisfiera denna ekvation.

Vi skola nu visa att ekv. (14) har endast en enda positiv rot $< \frac{a}{b}$. Sätt

$$(15) \quad \ldots \quad \begin{cases} y = u^n - a + b\sqrt[n]{a - bu}, \\ \therefore \; y' = nu^{n-1} - \frac{b^2}{n} \cdot \frac{1}{(a - bu)^{\frac{n-1}{n}}}. \end{cases}$$

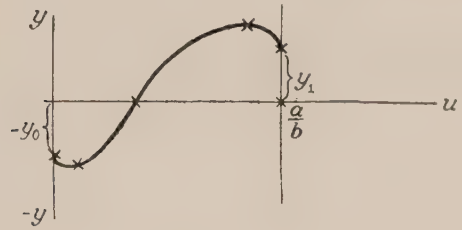


Fig. 1 (ekv. 15).

För $u = 0$ fås

$$(16) \quad \ldots \quad \begin{cases} y_0 = a^{\frac{1}{n}}\left(b - a^{\frac{n-1}{n}}\right) < 0 \text{ enligt (9), och} \\ y_0' = -\dfrac{b^2}{na^{\frac{n-1}{n}}} < 0, \end{cases}$$

och för $u = \frac{a}{b}$ fås

$$(17) \quad \ldots \quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{a}{b^n}(a^{n-1} - b^n) > 0 \text{ enligt (9) och} \\ y_1' = -\infty, \end{cases}$$

där y_1' är gränsvärdet för $u = \frac{a}{b}$ i intervallet $0 \leq u \leq \frac{a}{b}$.

Då såluuda y och y_1 ha motsatta tecken, så blir $y=0$ i någon punkt mellan 0 och $\frac{a}{b}$ (fig. 1).

Då vidare y_0' och y_1' båda äro negativa måste (fig. 1)

(18) y' vara $=0$ i minst två olika punkter mellan 0 och $\frac{a}{b}$.

De häremot svarande u-värdena fås genom att sätta $y'=0$ i den senare av ekvationerna (15), som då efter hyfsning kan skrivas

(19) $u^n(a-bu)=\left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}$.

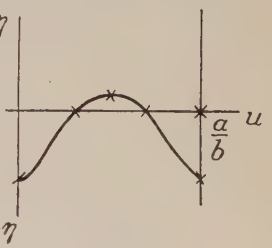


Fig. 2 (ekv. 20).

För att bestämma antalet positiva rötter till ekv. (19) sätta vi

(20) . . . $\begin{cases} \eta=u^n(a-bu)-\left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}}, \\ \therefore\ \eta'=nau^{n-1}-(n+1)bu^n. \end{cases}$

η' blir $=0$ i endast *en* punkt (för $u>0$), alltså kan η bli $=0$ för högst två u-värden mellan 0 och $\frac{a}{b}$ (fig. 2). Då sålunda y' blir $=0$ i två och endast två punkter, så blir $y=0$ i en och endast en punkt för $0<u<\frac{a}{b}$ (fig. 1).

Då nu en likadan ekvation gäller såväl för v som för x, måste

(21) . . . . . $u=v=x$.

Lösningen (8) gäller således alltid, när villkoret (9) är uppfyllt.

Anm. Lösningen (8) innebär, att vi vid de successiva approximationerna startat med värdet $x=0$ i högra ledet av ekv. (7). Men man hade lika väl kunnat starta med ett godtyckligt positivt tal x_0, som är $\leqq\frac{a}{b}$, och satt

(22) $x_1=\sqrt[n]{a-bx_0}$, $x_2=\sqrt[n]{a-bx_1}$, $x_3=\sqrt[n]{a-bx_2}$ etc.

Ty om x_0 är $< x$, så är $a - bx_0 > a - bx$, $\because x_1 > x > x_0$, $\because x_2 < x_1$. Vidare är ekv. (14) gällande även för x. Kurvan (15) (fig. 1) gäller då även, om man sätter x i stället för u. Men av fig. 1 ser man, att y är < 0 för $x_0 <$ roten x,

$$\because x_0^n - a + b\sqrt[n]{a - bx_0} < 0,$$

d. v. s. $x_0^n < a - b\sqrt[n]{a - bx_0} = a - bx_1 = x_2^n$, $\because x_0 < x_2$,

(23) . . . . . $\because x_0 < x_2 < x_1$.

Av (23) och (22) återfås sedan samma olikheter som i (10) och (11).

Fallet $x_0 > x$ behandlas på samma vis.

Om villkoret (9) ej är uppfyllt, finner man på samma sätt, att x_2 blir $< x_0$, och att således ingen approximation äger rum.

Resultat. Första approximationsmetoden är alltid användbar, då a^{n-1} är $> b^n$, men aldrig annars. Approximationen är alternerande.

Andra approximationsmetoden.

Skriver man ekv. (4) under formen

(24) . . . . . $x = \sqrt[n-1]{\frac{a}{x} - b}$

och startar med ett godtyckligt positivt utgångsvärde x_0, som tydligen måste vara $< \frac{a}{b}$, så bli de successiva approximationerna

(25) $x_1 = \sqrt[n-1]{\frac{a}{x_0} - b}$, $x_2 = \sqrt[n-1]{\frac{a}{x_1} - b}$, $x_3 = \sqrt[n-1]{\frac{a}{x_2} - b}$,

$$x_4 = \sqrt[n-1]{\frac{a}{x_3} - b} \text{ etc.}$$

Om x_0 är $< x$, så blir enligt (24) $x_1 > x$, vadan approximationen blir alternerande. Det gäller då att se, om x_2

blir $> x_0$. Elimineras x_1, så fås (25)

$$(26) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x_2^{n-1} = \frac{a}{\sqrt[n-1]{\frac{a}{x_0} - b}} - b .$$

Men x satisfierar ekvationen

$$(27) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^{n-1} = \frac{a}{\sqrt[n-1]{\frac{a}{x} - b}} - b .$$

Vi ha då att studera kurvan

$$(28) \quad \begin{cases} y = x^{n-1} - \dfrac{a}{\sqrt[n-1]{\frac{a}{x} - b}} + b , \\ \therefore \; y' = (n-1)\, x^{n-2} - \dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{a^2}{x^2} \cdot \dfrac{1}{\left(\frac{a}{x} - b\right)^{\frac{n}{n-1}}} . \end{cases}$$

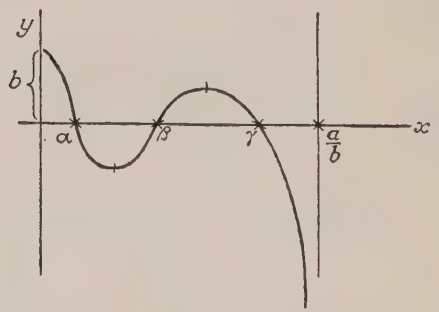


Fig. 3 (ekv. 28).

För $x=0$ är $y=b$ och $y'<0$; för $x=\frac{a}{b}$ är $y=-\infty$ och $y'=-\infty$.

I huru många punkter blir $y'=0$? Sättes $y'=0$ i ekv. (28), så erhålles efter någon reduktion

$$(29) \quad . \quad . \quad . \quad x^{n-2}(a - bx) = \left(\frac{a}{n-1}\right)^{\frac{2(n-1)}{n}} .$$

Behandlas ekv. (29) på samma sätt som (19) finna vi, att den har högst två reella rötter. Då y' sålunda ej kan bli $= 0$ i mer än två punkter, så kan y ej bli $= 0$ i fler än tre punkter (fig. 3). Kalla de motsvarande x-värdena för α, β och γ resp., där $\alpha < \beta < \gamma$.

Antag först att x_0 är $< \alpha$. Då är motsvarande y-värde > 0,

$$\because\ x_0^{n-1} - \frac{a}{\sqrt[n-1]{\frac{a}{x_0} - b}} + b > 0,$$

$$\because\ x_0^{n-1} > \frac{a}{\sqrt[n-1]{\frac{a}{x_0} - b}} - b = x_2^{n-1} \quad (26),$$

$\because\ x_2 < x_0$, vadan ingen approximation erhålles. Detsamma blir fallet, om x_0 väljes $> \gamma$. Man finner nämligen då, att x_2 blir $> x_0$.

Om x_0 ligger mellan α och β, blir $y < 0$, och x_2 blir $> x_0$; men om x_0 ligger mellan β och γ blir $y > 0$, och x_2 blir $< x_0$. Härav följer, att approximation kan äga rum endast i det fall, att

(30) . . . . . $\alpha < x_0 < \gamma$.

Om kurvan råkar x-axeln i endast *en* punkt, kan således approximation ej äga rum.

Vi skola nu bevisa, att om villkoret (30) är uppfyllt

(31) . . . . . $\lim_{\nu = \infty} x_\nu = \beta$.

För att y skall bliva $= 0$ i tre punkter fordras, att de båda y-värden, för vilka y' blir $= 0$, ha motsatta tecken. Vi skola därför närmare undersöka dessa värden.

Enligt (28) och (29) är

(32) . . $\begin{cases} y = x^{n-1} - \dfrac{a}{\sqrt[n-1]{\frac{a}{x} - b}} + b \\ bx^{n-1} - ax^{n-2} + z^{2(n-1)} = 0, \text{ där} \end{cases}$

(33) . . . . . $z = \left(\frac{a}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Eliminera b mellan ekvationerna (32)! Då finner man

$$(34)\quad \begin{cases} y=\dfrac{1}{x^{n-1}}\,Q(x) \\ Q(x)=x^{2(n-1)}-z^{2(n-1)}-\dfrac{a}{z^2}\,x^{n-2}(x^2-z^2), \end{cases}$$

där $Q(x)$ innehåller faktorn x^2-z. Vidare finner man

$$(35)\quad \begin{cases} Q'(x)=x^{n-3}R(x) \\ R(x)=2(n-1)\,x^n-\dfrac{an}{z^2}\,x^2+a(n-2). \end{cases}$$

Sättes $R(x)=0$, får man en ekvation som kan behandlas liksom ekv. (19), och man finner, att den har högst två reella rötter. Nu finner man genom insättning (33)

$$(36)\quad \ldots\ldots\quad R(z)=R'(z)=0.$$

Funktionen $Q(x)$ (34) har alltså en tredubbel faktor $(x-z)$, men kan eljest ej bli $=0$. Man kan sålunda skriva

$$(37)\quad \ldots\ldots\quad \begin{cases} y=\dfrac{1}{x^{n-1}}(x-z)^3\,S(x) \\ S(x)>0. \end{cases}$$

I ekv. (37) beteckna x och y koordinaterna för de punkter, för vilka y' är $=0$, och man finner, att de två y-värdena ha samma eller motsatta tecken, allteftersom de båda x-värdena ligga på samma eller motsatta sidor om värdet z. Om man i den andra ekvationen i (32) kallar vänstra ledet för $-\eta$ fås en kurva, som svarar mot fig. 2 (ekv. 20). Endast i det fall, att för $x=z$ värdet η blir positivt inträffar det, att x-värdena för $\eta=0$ ligga på var sin sida om värdet z (fig. 2). Kallas detta η-värde för η_z, så erhålles

$$(38)\quad \ldots\quad \eta_z=z^{n-1}[(n-2)\,z^{n-1}-b].$$

Villkoret för att approximationen (31) skall gälla är alltså

$$(39)\quad \ldots\ldots\quad b<(n-2)\,z^{n-1}. \quad (33)$$

Man finner, att om kurvan (28) tangerar x-axeln (fig. 3), så är enligt (37) $x=z$ i tangeringspunkten. Insättes detta värde i ekv. (4), finner man

$$(40)\quad \ldots\ldots\quad b=(n-2)\,z^{n-1},$$

och således blir enligt (38)

(41) . . . . . $\eta_\varkappa = 0.$

Maximivärdet på η finner man lätt inträffa för

(42) . . . . . $\bar{x} = \frac{n-2}{n-1}\,\frac{a}{b}.$

Insättes här värdet på b enligt (40), finner man $x = \varkappa$, $\because\ \eta_{\max.} = 0$, vadan de båda punkter, där y' är $= 0$ i (28), sammanfalla. Om således kurvan (28) tangerar x-axeln, så sker det i tre sammanfallande punkter.

Vi skola nu bevisa, att om

$$y_0 = x_0^{n-1} - \frac{a}{\sqrt[n-1]{\frac{a}{x_0} - b}} + b \text{ är } < 0,$$

så är $$y_1 = x_1^{n-1} - \frac{a}{\sqrt[n-1]{\frac{a}{x_1} - b}} + b > 0.$$

Enligt (25) är

$$y_0 = x_0^{n-1} - \frac{a}{x_1} + b,\quad y_1 = \frac{a}{x_0} - \frac{a}{\sqrt[n-1]{\frac{a}{x_1} - b}},$$

d. v. s. vi skola bevisa, att om

$$\frac{a}{x_1} \text{ är } > x_0^{n-1} + b, \text{ så är } \sqrt[n-1]{\frac{a}{x_1} - b} > x_0,$$

vilket inses omedelbart.

Vidare finner man, att om x_0 väljes $= \bar{x}$ (42), så blir $x_1 < \frac{a}{b}$ enligt (33). Härav följer, att γ ej kan vara en rot till ekv. (24). Tå då x_0 är $< \gamma$, så vore $x_1 > \gamma$ och således enligt fig. 3 $y_1 < 0$. Likaså kan α ej vara en rot, $\because$ måste roten vara $= \beta$. Om $\alpha < x_0 < \beta$, så blir således $\beta < x_1 < \gamma$, och man finner utan svårighet olikheter identiskt lika med (10) och (11) och således, att $\lim_{\nu=\infty} x_\nu = \beta$ (31).

Resultat. Andra approximationsmetoden ger alternativ approximation och leder till målet endast om b är $< (n-2)\left(\frac{a}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$. Är $b = (n-2)\left(\frac{a}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$, så är $x = \left(\frac{a}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$. Man måste starta med ett begynnelsevärde x_0, som ligger mellan vissa gränser (α och γ i fig. 3). Man är på den säkra sidan, om man väljer $x_0 = \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{a}{b}$.

En enkel tredelning av den räta cirkulära konen.

Av AUG. SÖRENSEN.

Följande enkla tredelning av den räta cirkulära konen, vilken jag icke funnit omnämnd i den mig bekanta litteraturen, torde icke vara utan intresse.

En rät cirkulär kon (fig. 1) är given. Vi beteckna bottencirkelns radie med r, höjden med h, längden av generatrisen från toppen S till bottencirkelns periferi med s och den genererande vinkeln (halva toppvinkeln) med α. Då är således

$$\cos \alpha = \frac{h}{s}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Vi skära nu denna kon med ett plan parallellt med ett tangentplan. Den uppkommande sektionen blir då ett parabelsegment ABC (fig. 2—4). Antages planet skära konens cirkulära basplan på avståndet x från medelpunkten O, kan man lätt uttrycka parabelsegmentets baskorda b_x och höjd h_x såsom funktioner av x. Man har nämligen enligt fig. 2

$$b_x = 2\sqrt{r^2 - x^2} \quad \ldots \quad (2)$$

och enligt fig. 1

$$\frac{h_x}{x+r} = \frac{s}{2r},$$

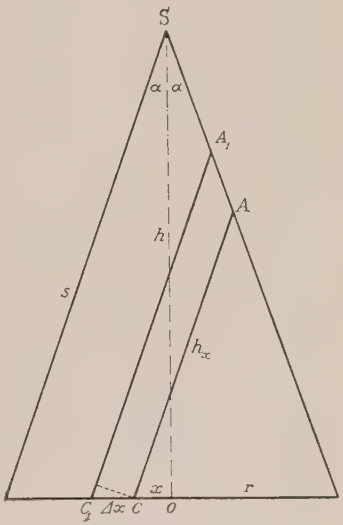


Fig. 1.

varav

$$h_x = \frac{s}{2r}(r+x). \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Sektionsarean blir således enligt en bekant formel

$$A_x = \frac{2}{3} b_x h_x = \frac{2s}{3r}(r+x)\sqrt{r^2-x^2}. \quad \ldots \quad (4)$$

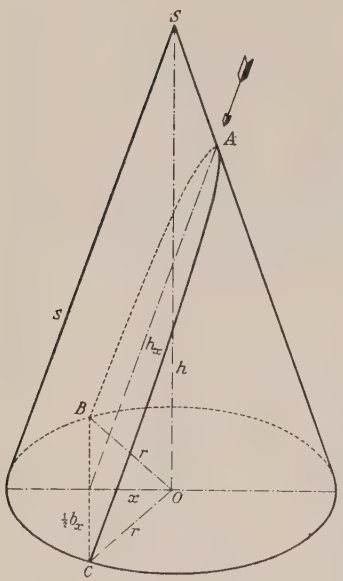


Fig. 2.

Tages nu ett nytt skärningsplan $A_1B_1C_1$ (fig. 1 och 3), parallellt med det förra och skärande bottencirkeln på avståndet $x+\Delta x$ från medelpunkten, erhålles en tunn parabelformig skiva, vars tjocklek

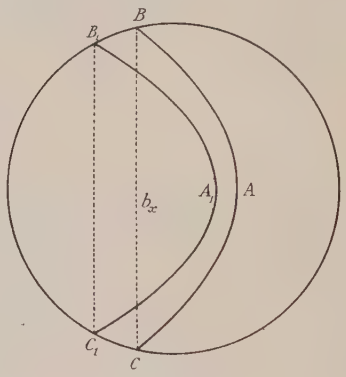


Fig. 3.

är $\Delta x \cos\alpha = \frac{h}{s} \cdot \Delta x$ och vars volym ΔV_x således i allmänhet ligger mellan värdena

$$\frac{2h}{3r}(r+x)\sqrt{r^2-x^2} \cdot \Delta x$$

och

$$\frac{2h}{3r}(r+x+\Delta x)\sqrt{r^2-(x+\Delta x)^2} \cdot \Delta x;$$

Man får då

$$\frac{dV_x}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V_x}{\Delta x} = \frac{2h}{3r}(r+x)\sqrt{r^2-x^2}.$$

Volymen av den av planet ABC nedtill avskurna hovformiga delen blir således

$$V_0 = \int_{-r}^{x} dV_x = \int_{-r}^{x} \frac{dV_x}{dx} \cdot dx = \frac{2h}{3r} \int_{-r}^{x} (r+x)\sqrt{r^2-x^2}\, dx \quad \ldots \quad (5)$$

Av uttrycket för den allmänna integralen

$$I = \int (r+x)\sqrt{r^2-x^2}\, dx$$

$$= r\int \sqrt{r^2-x^2}\, dx + \int x\sqrt{r^2-x^2}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} r\left(x\sqrt{r^2-x^2} + r^2 \arcsin\frac{x}{r}\right) - \tfrac{1}{3}(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2} + C, \quad (6)$$

finner man, att de båda algebraiska funktionerna försvinna var för sig för $x = \pm r$ och taga ut varandra för $x = \frac{1}{2}r$. Om skärningsplanet lägges så, att det skär in i konen på $\frac{1}{4}$ av generatrisens längd, från spetsen räknat, får man därför ett mycket enkelt förhållande mellan kondelarna. För volymen V_0 av den hovformiga delen har man nämligen då

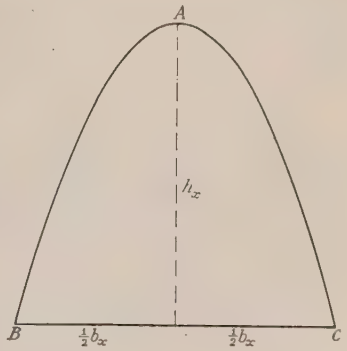


Fig. 4.

$$V_0 = \frac{2h}{3r} \int_{-r}^{\frac{1}{2}r} (r+x)\sqrt{r^2-x^2}\, dx = \frac{2h}{3r} \cdot \tfrac{1}{2} r^3 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \tfrac{2}{9}\pi r^2 h$$

och för volymen V_s av den ovanför skärningsplanet liggande delen av konen

$$V_s = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h - \tfrac{2}{9}\pi r^2 h = \tfrac{1}{9}\pi r^2 h,$$

varav

$$V_0 : V_s = 2 : 1.$$

Av ovanstående erhålles följande enkla tredelning av konen. Man skär först konen med ett plan parallellt med ett tangentplan och på sådan höjd, att planet skär in i konen på $\frac{1}{4}$ av generatrisens längd, från spetsen räknat. Därefter skäres den nedtill kvarstående hovformiga delen mitt itu genom ett (mot bottencirkeln vinkelrätt) symmetriplan.

Det förtjänar anmärkas, att om konen skäres med plan, parallella med ett tangentplan, så blir sektionsarean störst, när skärningsplanet har det ovan angivna läget. Sektionsarean är nämligen proportionell mot värdet av funktionen

$$y=(r+x)\sqrt{r^2-x^2}.$$

Ur ekvationen

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{r^2-x^2}-\frac{x(r+x)}{\sqrt{r^2-x^2}}=0$$

erhålles

$$r^2-x^2-x(r+x)=0$$

eller

$$(r+x)(r-2x)=0.$$

Värdet $x=-r$ ger icke något maximivärde. Då det på grund av uppgiftens natur är tydligt, att ett sådant existerar, måste det tydligen erhållas för $x=\frac{1}{2}r$.

Beräkningen av $\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ kan ske på följande sätt. Sättes $x=r\sin\theta$, får man

$$\begin{aligned}\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx&=r^2\int\cos^2\theta\,d\theta=\tfrac{1}{2}r^2\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta\\&=\tfrac{1}{2}r^2\int d\theta+\tfrac{1}{2}r^2\int\cos 2\theta\,d\theta\\&=\tfrac{1}{2}r^2\cdot\theta+\tfrac{1}{4}r^2\sin 2\theta+C\\&=\tfrac{1}{2}r^2\cdot\theta+\tfrac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta+C\\&=\tfrac{1}{2}r^2\arcsin\frac{x}{r}+\tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}+C.\end{aligned}$$

En användning av Bernoulliska tal.

Av S. BÄGMAN.

För att beräkna summan s_n av serien

$$1^n+2^n+3^n+\ldots+(v-1)^n,$$

där n är helt tal gäller det att finna en funktion $F(v)$, sådan att

$$F(v+1)-F(v)=v^n.$$

Vi erhålla nämligen

$$\begin{aligned} F(2)-F(1) &= 1^n \\ F(3)-F(2) &= 2^n \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ F(v)-F(v-1) &= (v-1)^n \end{aligned}$$

varav genom addition

$$F(v)-F(1)=s_n.$$

För att bestämma $F(v)$ införa vi de s. k. bernoulliska talen[1] B_1, B_2, $B_3 \ldots B_{n-1} \ldots$ förbundna med varandra genom systemet

$$\left.\begin{aligned} 2B_1+1&=0 \\ 3B_2+3B_1+1&=0 \\ 4B_3+6B_2+4B_1+1&=0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ nB_{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}B_{n-2}+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}B_2+nB_1+1&=0 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

[1] Dessa tal bruka definieras genom ekvationen

$$\frac{x}{e^x-1}=1+\frac{B_1x}{1}+\frac{B_2x^2}{2!}+\ldots+\frac{B_nx^n}{n!}+\ldots$$

Se t. ex. Vallée Poussin, Cours d'Analyse Infinitésimale II, p. 279.

varur härledes

$$B_1 = -\tfrac{1}{2} \quad B_4 = -\tfrac{1}{30} \quad B_7 = 0$$
$$B_2 = \tfrac{1}{6} \quad B_5 = 0 \quad B_8 = -\tfrac{1}{30}$$
$$B_3 = 0 \quad B_6 = \tfrac{1}{42} \quad B_9 = 0$$

o. s. v.

Vi skola se, att alla B med udda index generellt äro $= 0$. Vi kunna ge systemet (1) följande symboliska form

$$(B+1)^n - B^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gällande för alla $n > 1$, om vi i (2) utveckla enligt binomialteoremet och därefter ersätta digniteterna av B med de bernoulliska tal, vilkas index är = dignitetens exponent.

Så t. ex. vilja vi i det följande uppfatta $(y+B)^3$ såsom $y^3+3B_1y^2+3B_2y+B_3$ och $(yB)^3$ såsom y^3B_3.

*

Låt $f(y)$ vara ett polynom av n:te graden, d. v. s.

$$f(y) = \sum_0^n a_n y^n = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ . \ . \ . \ a_1 y + a_0$$

så skola vi bevisa att

$$f(y+B+1) - f(y+B) = f'(y).$$

Enligt binomialteoremet fås, om p är ett helt tal

$$(y+B+1)^p - (y+B)^p = y^p + py^{p-1}(B_1+1) +$$
$$+ \frac{p(p-1)}{2} y^{p-2}(B+1)^2 + \ . \ . \ . \ + (B+1)^p -$$
$$- (y^p + py^{p-1}B_1 + \frac{p(p-1)}{2} y^{p-2} \cdot B^2 + \ . \ . \ . \ + B^p) =$$
$$= py^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} y^{p-2}[(B+1)^2 - B^2] + \ . \ . \ . \ + [(B+1)^p - B^p].$$

Enligt (2) blir alltså

$$(y+B+1)^p - (y+B)^p = py^{p-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Multiplicera (3) med a_n, a_{n-1}, $a_{n-2} \ . \ . \ . \ a_1$ och sätt $p = n$, $n-1$, $n-2 \ . \ . \ . \ 1$ resp., så fås

$$f(y+B+1) - f(y+B) = f'(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Sätt $f(y)=(2y-1)^p$, så fås

$$[2(y+B+1)-1]^p-[2(y+B)-1]^p=2p(2y-1)^{p-1}.$$

Sätt $y=0$, så fås

$$(2B+1)^p-(2B-1)^p=2p(-1)^{p-1}$$

eller

$$(2B+1)^p-(2B-1)^p=-4pB_1(-1)^{p-1}, \quad . \; . \; (5)$$

ty $$B_1=-\tfrac{1}{2}.$$

Om p är ett jämnt tal innehåller (5) endast bernoulliska tal med udda index från och med B_3, ty sista termen i vänstra ledet är $4pB_1$ och lika med högra ledet. Sätt därför i (5)

$$p=4,\ 6\ .\ .\ .\ 2n,$$

så fås successivt $B_3=B_5=\ .\ .\ .\ =B_{2n-1}=0$.[1]

(5) kan skrivas

$$(B+\tfrac{1}{2})^p-(B-\tfrac{1}{2})^p=-2pB_1(-\tfrac{1}{2})^{p-1} \quad . \; . \; . \quad (6$$

en ekvation, som vi skola göra bruk av i det följande.

*

Sätt $p=n+1$, så övergår (3) i

$$\frac{(y+B+1)^{n+1}}{n+1}-\frac{(y+B)^{n+1}}{n+1}=y^n.$$

Funktionen $F(v)$ skulle uppfylla villkoret

$$F(v+1)-F(v)=v^n.$$

Vi kunna därför sätta

$$F(v)=\frac{(v+B)^{n+1}}{n+1}+\text{konst.}$$

[1] Sätt i ekvationen $\frac{x}{e^x-1}=1+\frac{B_1x}{1}+\frac{B_2x^2}{2!}+\ .\ .\ .\ +\frac{B_nx^n}{n!}+\ .\ .\ .\ .$ $B_1=-\frac{1}{2}$, så fås omedelbart $B_3=B_5=\ .\ .\ .\ =B_{2n-1}=0$, ty $\frac{x}{e^x-1}-1+\frac{x}{2}$ är en jämn funktion.

och $$s_n = F(v) - F(1) = \frac{(v+B)^{n+1} - (B+1)^{n+1}}{n+1}$$

eller $$s_n = \frac{(v+B)^{n+1} - B^{n+1}}{n+1}, \quad \text{ty } (B+1)^{n+1} = B^{n+1}.$$

Sålunda erhålles

$$s_1 = \frac{(v+B)^2 - B^2}{2} = \frac{v^2 + 2vB_1}{2} = \frac{v(v-1)}{2}$$

$$s_2 = \frac{(v+B)^3 - B^3}{3} = \frac{v^3 + 3v^2B_1 + 3vB_2}{3} = \frac{1}{3}\left(v^3 - \frac{3}{2}v^2 + \frac{v}{2}\right) =$$

$$= \frac{v(v-1)(2v-1)}{6}$$

$$s_3 = \frac{(v+B)^4 - B^4}{4} = \frac{v^4 + 4v^3B_1 + 6v^2B_2 + 4vB_3}{4} = \frac{v^2(v-1)^2}{4}$$

$$s_4 = \frac{(v+B)^5 - B^5}{5} = \frac{v^5 + 5v^4B_1 + 10v^3B_2 + 10v^2B_3 + 5vB_4}{5} =$$

$$= \frac{v(v-1)(2v-1)(3v^2 - 3v - 1)}{30}.$$

Sätt $s_n = n!\,\varphi_n(v)$

$$\therefore \varphi_n(v) = \frac{(v+B)^{n+1} - B^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \ldots \quad (7)$$

så äro $\varphi_n(v)$, $\varphi_{n-1}(v)$ ... de s. k. bernoulliska polynomen[1].

Man ser genast att

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0.$$

Genom att derivera (7) fås

$$\varphi_n'(v) = \frac{(v+B)^n}{n!} = \frac{(v+B)^n - B^n}{n!} + \frac{B^n}{n!}$$

eller $$\varphi_n'(v) = \varphi_{n-1}(v) + \frac{B_n}{n!}$$

[1] De bruka definieras genom ekvationen

$$\frac{e^{vx} - 1}{e^x - 1} = v + \varphi_1(v)x + \varphi_2(v)x^2 + \ldots + \varphi_n(v)x^n + \ldots$$

Om $n=2k+1$, blir

$$\varphi'_{2k+1}(v)=\varphi_{2k}(v), \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

ty $$B_{2k+1}=0.$$

Om $n=2k$, blir

$$\varphi'_{2k}(v)=\varphi_{2k-1}(v)+\frac{B_{2k}}{(2k)!} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Man kan använda (6) och (7) för att genom integration bestämma de successiva seriesummorna.

Av $s_1=\varphi_1(v)=\dfrac{v^2-v}{2}$ erhålles

$$\frac{s_2}{2!}=\varphi_2(v)=\frac{v^3}{6}-\frac{v^2}{4}+Cv+C_1$$

där $C=\dfrac{B_2}{2!}=\dfrac{1}{12}$. C och C_1 bestämmas dock lättast, om man sätter $v=0$ och $v=1$.

Då fås $C_1=0$ och $\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+C=0$ eller $C=\frac{1}{12}$.

Vi ha sett att $\varphi_2(\frac{1}{2})=\varphi_4(\frac{1}{2})=0$ och vilja visa att det gäller generellt att $\varphi_{2k}(\frac{1}{2})=0$.

Ekvation (6) kan skrivas

$$(B+\tfrac{1}{2})^p=(B-\tfrac{1}{2})^p-2pB_1(-\tfrac{1}{2})^{p-1}.$$

Om p är ett udda tal fås

$$(B+\tfrac{1}{2})^p=B_p-p\cdot\tfrac{1}{2}B_{p-1}+\frac{p(p-1)}{2}\cdot(\tfrac{1}{2})^2B_{p-2}+\ \ldots\ +$$

$$+p(\tfrac{1}{2})^{p-1}B_1-(\tfrac{1}{2})^p-2pB_1(\tfrac{1}{2})^{p-1}=$$

$$=-(B_p+p\cdot\tfrac{1}{2}B_{p-1}+\frac{p(p-1)}{2}(\tfrac{1}{2})^2B_{p-2}+\ \ldots\ +$$

$$+p(\tfrac{1}{2})^{p-1}B_1+(\tfrac{1}{2})^p)$$

ty $$B_p=B_{p-2}=\ \ldots\ =B_3=0 \text{ om } p \text{ är udda}$$

eller $$(B+\tfrac{1}{2})^p=-(B+\tfrac{1}{2})^p$$

eller $$(B+\tfrac{1}{2})^p=0.$$

Alltså fås

$$\varphi_{2k}(\tfrac{1}{2}) = \frac{(B+\frac{1}{2})^{2k+1} - B^{2k+1}}{2k+1} = \frac{(B+\frac{1}{2})^{2k+1}}{2k+1} = 0.$$

*

Med ovanstående ha vi blott velat visa, att man genom att utgå från ekvation (2) kan på elementär väg härleda några av de resultat, som erhållas genom att definiera bernoulliska tal och polynom genom serieutvecklingar.

Banan och nerfallspunkten för en kropp, som kastas rätt upp från jordytan med stor hastighet.

Av BRYNOLF FÄNGE.

När en kropp kastas rätt upp, kunna två fall inträffa. Antingen återvänder den till jordytan, eller också avlägsnar sig kroppen oavbrutet från jorden och beger sig ut i rymden. För det senare fallet fordras en utgångshastighet, som överstiger 11,2 km/sek. En sådan hastighet är betydligt större, än vad man med tekniska hjälpmedel har kunnat åstadkomma, t. ex. genom att avskjuta en projektil med något av våra moderna artilleriredskap. Men det saknar dock ej sitt intresse att veta, hur en kropp skulle förhålla sig, om den utkastades med en hastighet, som närmar sig ovan anförda gränshastighet.

Jag visar härnedan, huru man kan beräkna de storheter, som karakterisera kroppens rörelse, och utgår då från den förutsättningen, att jorden har sfärisk form. Vidare förbiser jag atmosfärens inflytande på rörelsen. Vid så stor hastighet, som det här blir fråga om, blir det endast under en förhållandevis liten tid, som kroppen befinner sig i jordens atmosfär.

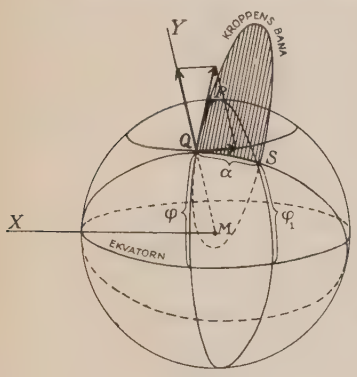


Fig. 1.

Utom den hastighet, som man tilldelar kroppen, erhåller den också en hastighetskomposant genom att den i utgångsögonblicket deltar i jordens rotation. Denna komposant är riktad åt öster. Dessa två hastig-

heter bestämma banans plan. Och man finner då lätt, att banplanet skär jorden i en storcirkel, som i det ögonblick, kroppen utslungas, går igenom den ort, varifrån kroppen kastas, och tangerar denna orts latitudcirkel. Nerfallspunkten kommer visserligen att ligga på denna storcirkel, men denna storcirkel få vi tänka oss fast, under det jorden roterar. Vi kunna emellertid lämpligen först beräkna den punkt, där kroppen skulle fallit ner, om jorden hade stannat i samma ögonblick, som kroppen utslungades. Sedan blir det en lätt sak att korrigera för det stycke, som jorden hinner vrida sig, under den tid kroppen befinner sig ovan jordytan. Denna korrektion gäller tydligen endast longituden för nerfallspunkten.

För att få ekvationerna enklare kunna vi välja ett koordinatsystem i banans plan. Vi förlägga origo i jordens medelpunkt. Positiva y-axeln låta vi gå igenom den ort, varifrån kroppen utkastas, eller rättare sagt den punkt, där orten befinner sig vid tiden, då kroppen utkastas. Vi antaga nämligen detta koordinatsystem fast och således oberoende av jordens rotation. x-axeln blir då parallell med den hastighetskomposant, som kroppen erhåller på grund av jordens rotation, och vi antaga x-axelns positiva riktning åt väster sett från orten (se fig. 1).

Den hastighet, som vi tilldela kroppen, må vara u, och hastighetskomposanten, som kroppen erhåller genom jordens rotation, kalla vi v.

Kroppens koordinater och hastighetskomposanter vid utgångsögonblicket ($t=0$) bli då:

$$x=0\,,\quad y=R\,,\quad \frac{dx}{dt}=-v\,,\quad \frac{dy}{dt}=u\,,$$

där R betyder jordens radie.

Eftersom nu kroppen är utsatt för jordens attraktion, och om vi antaga, att kroppens utgångshastighet ej överstiger 11,2 km/sek., så kommer kroppen att röra sig i en ellips, som skär jordytan i två punkter. Den ena punkten är orten, där kroppen kastas upp, och den andra är orten, där kroppen faller ner.

Av Newtons lag erhålla vi differentialekvationerna för rörelsen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^2}\cos\theta; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^2}\sin\theta,$$

där θ är den vinkel, som radius vector bildar med positiva x-axeln, och k en konstant. Dessa ekvationer kunna skrivas:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2x}{r^3}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2y}{r^3}. \quad \ldots\ldots (1)$$

För att integrera detta ekvationssystem[1] multiplicera vi den första ekvationen med $-y$ och den andra med x och addera:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

vilket ger:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c_1,$$

eller i polära koordinater:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = c_1. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Denna sista ekvation visar, att integrationskonstanten c_1 betyder ythastigheten. Vidare erhålles ur (1) genom att multiplicera med $2\frac{dx}{dt}$ och $2\frac{dy}{dt}$ respektive

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} + 2\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt} = -\frac{2k^2}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right),$$

vilket ger följande integral:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2}{r} + c_2. \quad \ldots\ldots (3)$$

I polära koordinater blir denna ekvation av följande utseende:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2}{r} + c_2.$$

[1] Se Moulton: Celestical Mechanics.

Elimineras $\frac{d\theta}{dt}$ med tillhjälp av (2) och om man använder likheten $\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$, erhålles

$$d\theta=\frac{c_1 dr}{r^2\sqrt{-\frac{c_1^2}{r^2}+\frac{2k^2}{r}+c_2}}.$$

Denna ekvation kan skrivas:

$$d\theta=\frac{-d\left(\frac{c_1}{r}\right)}{\sqrt{c_2+\frac{k^4}{c_1^2}-\left(\frac{k^2}{c_1}-\frac{c_1}{r}\right)^2}},$$

vilket ger

$$r=\frac{c_1}{\frac{k^2}{c_1}-\sqrt{c_2+\frac{k^4}{c_1^2}}\cdot\cos(\theta-c_3)},$$

där c_3 är integrationskonstanten. Detta är ekvationen för ett kägelsnitt och kan skrivas:

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)}, \quad \ldots\ldots (4)$$

där a och e äro ellipsens (hyperbelns) halva storaxel och excentricitet respektive. Sambandet mellan konstanterna i dessa ekvationer är följande:

$$a(1-e^2)=\frac{c_1^2}{k^2};\quad e^2=1+\frac{c_1^2 c_2}{k^4};\quad \omega=c_3-\pi.$$

Ekvationerna (2) och (3) erhålla nu följande utseende:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}&=k\sqrt{a(1-e^2)},\\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=k^2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

Konstanten k kan erhållas ur tyngdkraftens acceleration

vid jordytan, som vi kunna beteckna med g. För tiden $t=0$ gäller, att

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{k^2}{R^2}=-g \quad \because k=R\sqrt{g}.$$

Insättas begynnelsevillkoren i (5), erhållas de ekvationer, som behövas för beräkning av a och e.

$$v^2=g\cdot a(1-e^2),$$

$$u^2+v^2=R^2g\left(\frac{2}{R}-\frac{1}{a}\right).$$

Det framgår av den sista av dessa ekvationer, att a inte kan vara mindre än $R/2$. För att diskutera värdet på e tages jordens radie som enhet för längd och dygnet som enhet för tid. Vi få då $v=2\pi\cos\varphi$, där φ är ortens latitud. Alltså blir

$$1-e^2=\frac{4\pi^2\cos^2\varphi}{ga}.$$

Det minsta värde, som e kan antaga, är sålunda

$$\sqrt{1-\frac{8\pi^2}{g}}.$$

Om g sättes lika med $9{,}81$ m/(sek.)^2 $=11\,500$ jordradier/(dygn)^2, erhåller detta uttryck värdet $0{,}99655$.

För att komma åt huru lång tid, som kroppen håller sig ovan jordytan, måste vi söka ett uttryck för kroppens koordinater såsom funktioner av tiden. Vi utgå från (5) som i polära koordinater kunna skrivas:

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=k\sqrt{a(1-e^2)} \text{ och } \left(\frac{dr}{dt}\right)+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=k^2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).$$

Elimineras $\frac{d\theta}{dt}$, erhålles följande ekvation:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{k^2a(1-e^2)}{r^2}=k^2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right),$$

som kan skrivas:

$$ndt = \frac{r}{a} \cdot \frac{dr}{\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}}; \quad n = \frac{k}{a^{3/2}}.$$

Av ekvation (4) framgår, att det största, respektive minsta värde, som r kan antaga, är $a(1+e)$ och $a(1-e)$, varav följer, att $|a-r| \leq ae$. Vi kunna således använda substitutionen

$$\frac{a-r}{ae} = \cos E,$$

varigenom differentialekvationen får följande utseende:

$$ndt = (1 - e\cos E)\, dE,$$

som ger lösningen

$$n(t - t_1) = E - e\sin E^1.$$

Sättes i denna ekvation $E = \pi$, vilket motsvarar tiden $t = t_1 + \frac{\pi}{n}$, får r sitt största värde. Den sökta tiden blir då dubbelt så stor som detta t-värde.

Vid tiden $t = 0$ skall r vara lika med R, och om vi kalla motsvarande värde på E för E_1, erhålles

$$\cos E_1 = \frac{a-R}{ae} \quad \text{och} \quad nt_1 = -E_1 + e\sin E_1.$$

Härur kan t_1 beräknas.

Vi behöva vidare för att kunna beräkna longitud och latitud för nerfallspunkten även känna bågen QS, som vi kunna beteckna med α.

Om vi i ekvation (4) sätta

$$0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \text{ (se fig. 2)},$$

får r sitt största värde $= a(1+e)$.

Härav fås $\omega = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}$.

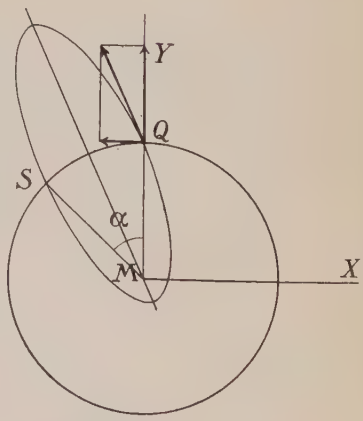


Fig. 2.

[1] Den s. k. Keplers ekvation. Se Moulton: Celestical Mechanics.

För att få en lämplig formel för beräkning av α derivera vi (4) och erhålla då

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 e \cdot \sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{a(1-e^2)}.$$

Nu gäller för tiden $t=0$ att

$$\frac{dr}{dt} = u \quad \text{och} \quad r\frac{d\theta}{dt} = v.$$

Vidare ha vi för samma tidpunkt $r=R$ och $\theta = \frac{\pi}{2}$. Insättas dessa värden i ovanstående ekvationer, erhålles följande formel

$$\frac{u}{v} = \frac{Re \sin\frac{\alpha}{2}}{a(1-e^2)}.$$

Betrakta vi den sfäriska triangeln PQS, så inses, att $PQ = 90° - \varphi$, $PS = 90° - \varphi_1$ och $QS = \alpha$, om φ_1 är latituden för nerfallspunkten. Vidare är vinkeln vid $Q = 90°$ och vinkeln vid P, som vi kunna kalla z, är lika med longitudskillnaden mellan de båda orterna (om jorden antages stillastående under rörelsen). Tillämpas formlerna för en sfärisk triangel, så erhålles

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi \cdot \cos\alpha,$$
$$\cos\varphi_1 \cdot \sin z = \sin\alpha.$$

Ur dessa två formler kunna φ_1 och z beräknas. Den vinkel, som jorden har vridit sig, under det kroppen håller sig ovan jordytan, är $\frac{2t}{P} \cdot 360$, där P är jordens rotationstid.

Longituden för nerfallspunkten blir då slutligen

$$\lambda_1 = \lambda + z - \frac{2t}{P} \cdot 360,$$

där λ är longituden för den ort, där kroppen kastas upp.

Sammanfattning av formlerna.

I nedanstående formler har jordradien och dygnet tagits såsom enheter för längd och tid.

$$u = 2\pi \cos \varphi ,$$

$$\frac{1}{a} = 2 - \frac{u^2 + v^2}{g} ,$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{ua\,(1 - e^2)}{ve} ,$$

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi \cdot \sin \alpha ,$$

$$\cos E = \frac{a - 1}{ae} ,$$

$$nt = e \sin E_1 - E_1 + \pi ,$$

$$n = \frac{\sqrt{g}}{a^{3/2}} ,$$

$$\sin z = \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi_1} ,$$

$$\lambda_1 = \lambda + z - 720t .$$

I nedanstående tabell finnas nerfallspunktens koordinater uträknade för olika hastigheter, då kroppen utkastas från en ort, vars latitud är 56° N och longitud 13° Ö om Gr. Som man ser av denna tabell, blir skillnaden i latitud inte så synnerligen stor, under det att longitudskillnaden växer kraftigt med hastigheten och kan bli hur stor som helst.

u	100	110	120	130	140	150	jord-radier/dygn
	7,38	8,12	8,86	9,60	10,3	11,1	km/sek.
a	0,885	1,056	1,339	1,889	3,394	23,58	jordradier
$2t$	0,0378	0,0531	0,0807	0,1422	0,3573	6,703	dygn
φ_1	55°,83	55°,80	55°,77	55°,73	55°,69	55°,64	—
λ_1	6°,64 Ö	6°,74 Ö	8°,57 V	30°,10 V	106°,9 V	110° Ö	—

Det har på sista tiden förekommit notiser i tidningarna om planer på att skjuta en projektil till månen. Man skulle ju kunna tänka sig, att man för detta ändamål ej skulle behöva så stor hastighet som 11,2 km/sek., alldenstund kroppen också får hjälp av månens dragningskraft. För

att få svar på denna fråga, utan att behöva gå in på det besvärliga trekropparsproblemet, kunna vi tänka oss en rätlinig rörelse mellan två attraherande centra (jorden och månen). Differentialekvationen, om vi förlägga origo i jordens medelpunkt och s är kroppens avstånd från jordens centrum, blir

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{k^2M}{s^2} + \frac{k^2m}{(b-s)^2} \quad \ldots\ldots (6)$$

M och m betyda jordens och månens massa respektive, b avståndet mellan deras medelpunkter och k en konstant. Multipliceras på båda sidor med $\frac{2ds}{dt}$, erhålles följande integral:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2M}{s} + \frac{2k^2m}{b-s} + c \quad \ldots\ldots (7)$$

Högra membrum har ett minimum för ett värde s_1 på s, som ligger mellan $s=0$ och $s=b$. Detta s-värde erhålles genom att sätta högra membrum av (6)$=0$. Man får då

$$s_1 = \frac{b\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}},$$

och detta motsvarar tydligen den punkt på sammanbindningslinjen, där kroppen attraheras lika mycket av jorden och månen.

Giver man åt c ett sådant värde, att högra membrum av (7) blir 0 för $s=s_1$, så blir rörelsen sådan, att kroppen nätt och jämnt lyckas överskrida denna kritiska punkt. Detta värde på c blir $-\frac{2k^2}{b}(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2$.

Har c däremot ett mindre värde, kommer $\frac{ds}{dt}$ att bli imaginärt för vissa s-värden, och kroppen kan aldrig överskrida detta område.

Den minsta utgångshastighet, som kroppen behöver ha för att kunna nå fram till månen, erhålles genom att först

tilldela c ovanstående värde och sedan i (7) sätta $s=R$ (jordens radie). Kalla vi denna utgångshastighet för u_1, så erhålles

$$u_1^2=\frac{2k^2M}{R}\left[1+\frac{m}{M}\cdot\frac{R}{b-R}-\left(1+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2\cdot\frac{R}{b}\right].$$

k^2M motsvarar k^2 i det föregående och kan alltså sättas $=R^2g$; om vi vidare sätta $\frac{m}{M}=0{,}0124$ och $\frac{b}{R}=60{,}3$, så erhålles $u_1^2=2Rg(1-0{,}0203)$. Tages endast den första termen i binomen, så blir $u_1^2=2Rg$, vilket motsvarar den ovan omtalade gränshastigheten 11,2 km/sek. Den erforderliga utgångshastigheten blir sålunda endast 1 % mindre, därigenom att kroppen så att säga får hjälp av månens dragningskraft.

Lund i augusti 1924.

Om den Dopplerska principen.

Av AD. MEYER.

Sannolikt hava många lärare i likhet med mig funnit, att den vanliga framställningen av Dopplers princip lider av en viss oklarhet, även frånsett det olämpliga i att framställningen för de båda fallen att ljudkällan eller örat äro i rörelse äro helt olika.

Om vi följa framställningen t. ex. hos Grimsehl,[1] så finna vi, att han för det förra fallet (ljudkällan i rörelse) talar om att våglängden skulle förändra sig med det stycke som ljudkällan rör sig under loppet av en svängning. Det är ganska svårt att inse att så skall vara förhållandet och att tänka sig utseendet av vågytan i detta fall. Och sedan tillägger han: »Für unser Ohr ist eine Verkürzung der Wellenlänge gleichbedeutend mit einer Vergrösserung der Schwingungszahl.» Detta är ej ens sant i sin allmänhet, ty om ett instrument blott ger samma svängningstal, så är det för åhöraren likgiltigt, om hans öra befinner sig i varm eller kall luft, i kolsyra eller vätgas.

Jag har därför trott, att en framställning skulle vara bättre, som alldeles lämnade våglängderna ur spelet, och blott beräknade det antal svängningar som per tidsenhet träffa örat.

Jag vill därför föreslå följande framställning:

Antag först, att ljudkällan, som vid tiden 0 befinner sig på avståndet l m från örat, rör sig mot detsamma med hastigheten c m/sek., under det att ljudets hastighet är v m/sek. och tonens svängningstal n svängn./sek., svängningstiden T sek.

[1] Samma deduktion finnes i de mig bekanta svenska läroböcker, som överhuvud giva formlerna för Dopplers princip

1:a svängningen avgår då vid tiden 0 på avståndet l från örat och framkommer således dit vid tiden $\frac{l}{v}$.

2:a svängningen avgår vid tiden T på avståndet $l - cT$, och framkommer vid tiden $T + \frac{l - cT}{v}$. På samma sätt med de följande, så att den p:te svängningen, som avgår vid tiden $(p-1)T$, framkommer vid tiden

$$(p-1)T + \frac{l-(p-1)cT}{v},$$

och den $(p+1)$:a framkommer vid tiden

$$pT + \frac{l - pcT}{v}.$$

Tidsintervallet mellan två på varandra följande stötar blir för örat således

$$T - \frac{cT}{v} = T \cdot \frac{v - c}{v}.$$

Örat hör således en ton med svängningstalet

$$n' = n \cdot \frac{v}{v - c}.$$

Att c växlar tecken, då ljudkällan avlägsnar sig från örat, är självklart ur deduktionen, och man får då således

$$n'' = n \cdot \frac{v}{v + c}.$$

Om å andra sidan en stillastående ljudkälla vid tiden 0 befinner sig på l m avstånd från ett öra, som rör sig mot densamma med hastigheten c m/sek., och i övrigt föregående beteckningar vidhållas, så får man:

1:a svängningen avgår vid tiden 0 och träffar örat vid tiden $\frac{l}{v+c}$ (ett vanligt rörelseproblem).

2:a svängningen, som avgår vid tiden T på avståndet $l - cT$ från örat, träffar detta vid tiden $T + \frac{l - cT}{v+c}$, och på

samma sätt med de följande, så att den p:te svängningen, som avgår vid tiden $(p-1)\,T$, träffar örat vid tiden

$$(p-1)\,T+\frac{l-(p-1)\,cT}{v+c},$$

och den $(p+1)$:a träffar örat vid tiden

$$pT+\frac{l-pcT}{v+c}.$$

Tidsintervallet mellan två på varandra följande stötar blir för örat således

$$T-\frac{cT}{v+c}=T\cdot\frac{v}{v+c},$$

och svängningstalet

$$n_1'=n\cdot\frac{v+c}{v}.$$

Om örat i stället avlägsnar sig från ljudkällan, fås

$$n_1''=n\cdot\frac{v-c}{v}.$$

*

Utom sin lättfattlighet har denna framställning även den fördelen, att bättre förklara en paradox vid den Dopplerska principen:

Ur formeln

$$n'=\frac{v}{v-c}\cdot n$$

se vi, att n' blir oändligt stor för $c=v$. Ur den gamla deduktionen se vi härav intet annat än att våglängden skulle vara $=0$, och örat således träffas av oändligt många oändligt små vågor. Vad detta innebär är omöjligt att säga. Ur den här givna deduktionen ses däremot, att den 2:a, 3:e o. s. v. vågstöten träffa örat på samma gång som den första, och således ingen ton uppkommer, utan blott en enstaka stöt.

Vidare ses av samma formel, att för $c>v$, n' blir negativ. Enligt den gamla framställningen fås då, att även

våglängden blir negativ, men vad detta fysikaliskt betyder framgår ej på något sätt. Enligt vårt betraktelsesätt ser man däremot genast, att det icke betyder annat än, att den sista vågstöten kommer först, och att de sedan följa på varandra med mellanrummen $\frac{c-v}{v}T$, vadan man således alltid får en ton (hörbar eller ej) med svängningstalet

$$n' = n \cdot \left| \frac{v}{v-c} \right| .$$

Här bör ytterligare tilläggas, att man lika lätt får formeln för svängningstalet, då både ljudkällan och örat röra sig mot varandra med hastigheterna c och c_1 resp. Vi hava nämligen då:

1:a svängningen avgår vid tiden 0 på avståndet l från örat och träffar detta vid tiden $\frac{l}{v+c_1}$.

2:a svängningen avgår vid tiden T på avståndet $l-(c+c_1)T$ från örat, och träffar detta vid tiden $T+\frac{l-(c+c_1)T}{v+c_1}$ o. s. v.

p:te svängningen avgår vid tiden $(p-1)T$ på avståndet $l-(c+c_1)(p-1)T$ från örat, och träffar detta vid tiden

$$(p-1)T+\frac{l-(c+c_1)(p-1)T}{v+c_1},$$

$(p+1)$:a svängningen träffar örat vid tiden

$$pT+\frac{l-(c+c_1)pT}{v+c_1}.$$

Örat mottager således svängningar med tidsintervallet

$$T-\frac{c+c_1}{v+c_1}T=\frac{v-c}{v+c_1}T,$$

och får ett svängningstal

$$N=n\frac{v+c_1}{v-c}.$$

Sättes här $c_1=-c$, så fås $N=n$, såsom det ju bör vara. Härur förklaras ännu en skenbar paradox vid den Dopp-

lerska principen: Vi tänka oss ett fartyg i gång med hastigheten c. Ljudkällan står akter om örat. På grund av ljudkällans hastighet skulle svängningstalet ökas med $n' - n$, på grund av örats rörelse skulle det minskas med $n - n_1''$. Dess verkliga svängningstal tycker man då borde bliva

$$n + (n' - n) - (n - n_1'') = n' + n'' - n =$$
$$= \left(\frac{v}{v-c} + \frac{v-c}{v} - 1\right) n = n\left(1 + \frac{c^2}{v(v-c)}\right),$$

d. v. s. tonen borde höjas genom fartygets rörelse. Stode ljudkällan för om örat, skulle motsvarande formel bliva

$$n\left(1 + \frac{c^2}{v(v+c)}\right).$$

Felet i detta resonemang, som ju låter ganska plausibelt, kan naturligtvis även påvisas på annat sätt, men knappast så enkelt som genom ovanstående formel för N.

*

Sedan ovanstående var skrivet, har jag funnit, att samma deduktion användes av Chwolson, men då likväl denna härledning ej torde vara synnerligen bekant för svenska lärare, och han ej heller förklarar de båda nämnda paradoxerna, så torde ovanstående lilla uppsats dock ej sakna sin nytta.

Pianot vid undervisning i akustik.

Av OTTO GALLANDER.

Sedan lagarna för svängande strängar genomgåtts, ha eleverna stor behållning av att läraren under 10 à 15 minuter i slutet av en lektion gör några försök vid skolans piano för att demonstrera resonansfenomen, klanganalys och svävningar.

Först visas, hur man med en tangent lyfter upp en av hamrarna. Trycker man långsamt ned tangenten rör sig hammaren uppåt, tills den kommer nära sina strängar, men faller ned utan att slå till dem. Slår man åter ned tangenten, går den av trögheten fram det sista stycket och slår till sina strängar, så att de ljuda, och faller sedan genast tillbaka, oaktat tangenten hålles nedtryckt. Denna konstruktion av pianot användes, emedan hammaren hastigt skulle dämpa de svängningar, vari strängen försatts vid anslaget, om hammaren ej omedelbart efter slaget lämnade strängen.

Vidare fästes uppmärksamheten på dämparna. Då en tangent tryckes ned, lyftes motsvarande dämpare, och den hålles uppe, så länge tangenten är nedtryckt, men så snart tangenten släppes upp, faller dämparen ned och dämpar ljudet hos sina strängar. Eventuellt kan man i detta sammanhang även demonstrera pedalernas verkan. Vidare påpekas längden och tjockleken hos de låga tonernas strängar i jämförelse med de högas samt hur disproportionen mellan massorna hos de låga och höga tonernas strängar något utjämnas genom att de lägsta tonerna blott ha *en* sträng, sedan ett visst område två och återstoden tre strängar.

Sedan så instrumentets byggnad behandlats, övergår man

till experimenten. Man kan då så försiktigt trycka ned tangenten till $\bar{c}$, att dess hammare ej slår till sina strängar, och håller nere denna tangent. Därpå slår man kraftigt an c och släpper åter denna tangent efter 1 à 2 sekunders förlopp. c dämpas då hastigt, men $\bar{c}$ ljuder från sina strängar. Att det är dessa, som utsända ljudet, framgår därav, att ljudet upphör, så snart $\bar{c}$:s tangent släppes. Genom resonans har $\bar{c}$:s sträng kommit i vibration.

Trycker man ned c:s tangent så försiktigt att dess strängar ej anslås, samt därpå kraftigt slår an $\bar{c}$ och släpper upp dess tangent, ljuder $\bar{c}$ från c:s sträng.

Håller man på samma sätt nere g, under det man slår an c, hör man $\bar{g}$ från g:s sträng, sedan c släppts. Likaledes får man $\bar{g}$ att ljuda från c:s sträng. Slår man an f, under det c hålles nere, hör man $\bar{\bar{c}}$ från c:s sträng, men det kan hända att någon annan för c och f gemensam överton höres ännu tydligare. Ett övat öra iakttager vid dylika försök flera övertoner på en gång.

Genom en serie dylika försök finner man, att en sträng genom resonans bringas att svänga med sin grundton eller med den lägsta gemensamma överton för dess egen grundton och den strängs, som genom anslag bringas i svängningar. Eventuellt framträder ej den första men någon eller några högre övertoner särskilt tydligt några sekunder efter det man släppt den tangent, som anslagits.

Av dessa försök framgår ett sätt att avgöra, vilka övertoner, som finnas med i den klang, som en sträng utsänder. Man håller då ned olika toner och slår an den tangent, vars ton man vill undersöka, låter den ljuda några sekunder från sin egen sträng och hör sedan efter, om grundtonen ljuder på den nedtryckta tangentens sträng.

Sedan man så analyserat klangen hos en ton, kan man lämpligen, om tiden det medgiver, med en linjal försiktigt trycka ned tangenterna till 3 oktaver på en gång och sedan kraftigt slå an den tangent, som ger oktaven under den lägsta ton, som hör till de nedhållna tangenterna. Då den anslagna tangentens ton ljudit några sekunder och därpå

släppts upp, hör man hela ackordet övertoner, och ett öva öra hör de olika övertonernas relativa styrka. Vid dessa försök böra egentligen även de svarta tangenterna inom det nedtryckta intervallet nedtryckas med en särskild linjal.

Då man gör nämnda försök, lyckas man bäst, om man slår an tonen i den ostrukna oktaven, dels emedan övertonerna därvid komma inom det område, där örat är känsligast, dels emedan man då ej får märkbara övertoner inom det gebit, där strängarna sakna dämpare.

Slutligen påvisas svävningar. Är pianot nystämt, äro alla strängar, som höra till samma ton, så stämda, att inga svävningar höras, då blott en ton anslås. Men har pianot stått en tid, sedan sista stämningen, brukar man höra svävningar redan vid anslaget av *en* ton, som har flera strängar på instrumentet.

Slår man an en ton och dess kvint eller dess kvart, hör man givetvis svävningar och kan meddela, att en stämmare ger pianot liksvävande temperatur just genom att stämma så, att kvarter och kvinter sväva lika.

Tiden har aldrig medgivit mig att i skolan behandla kombinationstoner. Sådana kunna emellertid påvisas medelst ett piano.

Differenstonen till $\bar{c}$ och $\bar{g}$ är som bekant c. Denna får man lätt fram, om man trycker ned c, så att ingen ton uppstår och därpå kraftigt slår an $\bar{c}$ och $\bar{g}$ på en gång och låter dem ljuda några sekunder. Då dessas tangenter släppas, hör man ett ackord av övertoner från c:s sträng. Då dessa börja dö bort, framträder c tydligt. Summationstoner äro mycket svåra att få fram, då övertoner till de båda anslagna tonerna förkväva den beräknade övertonen. Lättast går det att få fram summationstonen till en grundton och dess sext. Denna blir, som man lätt finner, kvarten i oktaven över sexten. Trycker man således ned $\bar{f}$ eller $\bar{\bar{f}}$ och slår an $\bar{c}$ och $\bar{a}$, kan man i ackordets övertoner, som ljuda från $\bar{f}$:s eller $\bar{\bar{f}}$:s sträng, sedan $\bar{c}$:s och $\bar{a}$:s strängar dämpats, urskilja $\bar{\bar{f}}$.

Differenstoner till övertoner kan man iakttaga vid de i början av denna uppsats omnämnda försöken. Det har dock aldrig hänt mig, att någon elev iakttagit dem, och då tiden ej medger en ordentlig behandling av dem, torde det ej vara skäl i att väcka uppmärksamheten på dem.

Vid alla nämnda försök bör man erinra sig, att pianot ej är stämt rent utan liksvävande. Resonansen är således ofullkomlig, och man har därför större anledning förvåna sig över, att försöken lyckas än att förarga sig över, att en och annan väntad effekt ej framträder.

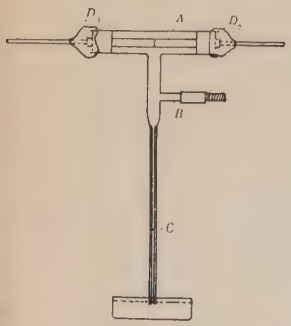
Ett laborationsförsök över Peltier- och Joule-effekten.

Av **A. FRENDEL.**

I Molls skolfysik finnes icke upptaget något experiment för att påvisa Peltier-effekten. Läroboken nöjer sig med att omnämna fenomenet i fråga. I det följande skall jag redogöra för ett enkelt lektionsexperiment, som även lämpar sig bra som laborationsförsök i 3:e ringen.

Apparaten, som består av en vismut — antimonstång, innesluten i en lufttermometer, har jag förfärdigat sålunda: För att den joulska uppvärmningen skall bli obetydlig och sålunda slutresultatet av en strömgenomgång i riktning vismut → antimon må kunna bli en faktisk temperatursänkning, tager jag vismut- och antimonstavarna tjocka (c:a 6 mm) och även så de koppartrådar, som utgå från dessa (2,6 mm). Jag vill undvika lödning vid sammansättningen av vismut- och antimonstaven. Lödningen inför nämligen ett par ovidkommande moment. Eleverna kunna undra över, vilken del lödmetallen eller lödvätskan kunna ha i Peltier-effekten. Därför sammanfogar jag metallstavarna genom gjutning. Därvid gick jag så tillväga, att jag stötte antimon och vismut till fint pulver. I ett i ena ändan tillsmält glasrör på 6 mm inre diameter hällde jag först vismutpulvret och ovanpå detta en pelare med antimonpulver. Sedan upphettade jag (börjande nerifrån) röret i en bunsenlåga, tills metallpulvret smälte undan för undan. Därvid är att ihågkomma, att pulvret vid smältningen sjunker samman, så att man får ta den ursprungliga pelaren med metallpulver åtskilligt längre än den man vill ha till slut. Då metallstavarna äro ganska bräckliga, är det vissa svårigheter att få dem ut ur glasröret. Jag gjorde så, att jag, när gjutningen var klar och metallen hade stelnat, förde glasröret fram och tillbaka i lågan, så att det blev ganska

hett, och stack det sedan hastigt ner i kallt vatten. Då sprack glasröret i små, små bitar, som man sedan bara behövde avlägsna för att ha stången färdig. Lufttermometern består av ett T-rör. Den översta delen (*A*) gav jag en diameter på 17 mm. Till detta smältes ett glasrör på 8 mm, och nederst ett sma lare termometerrör (*C*). Dessutom tillsmältes ett sidorör (*B*), som kunde tillslutas med en gummislang med glaspropp. När jag skulle fastsätta metallstaven i glasröret, sköt jag först ett par genomborrade korkar in över staven. I stavens bägge ändar lödde jag fast de tjocka koppartrådarna. Så sköts staven och korkarna in i glasröret (*A*), och korkarna inställdes så, att lödställena kommo strax utanför korkarna. Till sist göts lack utanför korkarna, så att lödställena kommo att ligga inne i lackmassan (D_1 och D_2). Man bör icke försumma att pröva, om lacket sluter lufttätt, genom att sänka ner hela apparaten, utom mynningen, under vatten och försöka blåsa in luft.[1]



Vid användningen sätter man lämpligen fast apparaten i ett byrettstativ och låter mynningen doppa ner i vatten, färgat med kaliumpermanganat (fuchsin är olämpligt, då det biter sig fast vid glaset, så att detta är svårt att åter få rent). Genom att »skruva» ut glasproppen vid *B* något, kan man få vattnet att stiga lagom högt upp i röret *C*. Efter vidröringen av apparaten och sedan man skruvat fast ledningstrådar vid densamma låter man den stå några minuter för att fullständigt antaga rummets temperatur.

Gäller det endast ett demonstrationsexperiment inför klassen utan några kvantitativa mätningar, är det enklast att markera vattenpelarens yta genom att fästa en tunn metalltråd i ett stativ bredvid apparaten och låta spetsen

[1] För den lärare, som icke önskar själv förfärdiga apparaten, kan upplysas om, att firman Svanström och Rylander, Stockholm, försäljer sådana till ett pris av 18 kr. pr st.

av tråden peka mot ytan. Då ser klassen lätt, om ytan höjer eller sänker sig. Gäller det ett laborationsförsök, kan man sätta fast en skala av millimeterrutat papper på *C*.

Man kan i nödfall reda sig med ett T-rör utan sidorör. Då för man in en vattendroppe så, att man sätter ner glasröret *C* med mynningen i en skål med vatten och värmer röret *A* med handen, så att ett par luftblåsor gå ut genom mynningen nertill. Vid avkylningen börjar vattnet stiga upp i röret *C*, och när man fått in så stor vattendroppe man vill ha, lyfter man mynningen över vattenytan i skålen. Men det är inte säkert, att man på detta sätt kommer att få droppen placerad på det ställe, där man vill ha den, och så måste apparaten då också lämnas i ro en kvart eller så för att åter fullt antaga rummets temperatur, innan man börjar använda den. Även får man vara noga med att efter försöket åter pressa ut vätskedroppen, då den annars, ifall temperaturen under mellantiden faller, kan till nästa gång, då man vill använda apparaten, ha åkt in i röret *A*. Dessa olägenheter bortfalla, om man använder sidorör.

Jag skall lämna några siffror från ett försök med den nyss beskrivna apparaten. Strömmen hölls varje gång sluten 2 minuter. Avläsningen skedde, sedan strömmen avbrutits och maximalverkan på termometern uppnåtts. 4 minuter

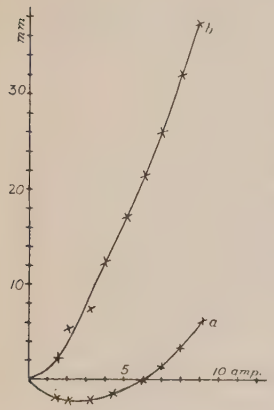
Tabell 1.

Strömstyrka (i amp.)	Effekt (uttryckt i mm)	
	a. vism.→ant.	b. ant.→vism.
1,4	— 1,8	+ 2,2
2	— 2,2	+ 5,0
3	— 2,4	+ 7,1
4	— 1,8	+ 12,0
5	— 1,1	+ 17,0
6	— 0,1	+ 21,5
7	+ 1,2	+ 26,0
8	+ 2,8	+ 32,0
9	+ 6,0	+ 38,0

sedan strömmen avbrutits, släpptes den på igen, nu med annan strömstyrka. Avkylning räknas i tabellen negativ, uppvärmning positiv.

Som synes blir avkylningen icke stor. Men det förekommer dock en faktisk volymsminskning hos luften, som för denna apparat är störst vid 3 amp.

Nu skall man skilja inverkan av Peltier- och Joule-effekten från varandra. Antag Joule-effekten $= x$ och Peltier-effekten $= y$, så fås t. ex. för 4 amp.



Diagr. 1.
(*a.* vismut → antimon,
b. antimon → vismut.)

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 12{,}0 \\ x - y &= -1{,}8 \end{aligned}\right\}, \text{ varav fås } \left.\begin{aligned} x &= 5{,}1 \\ y &= 6{,}9 \end{aligned}\right\}.$$

De sålunda uträknade värdena äro uppställda i *tab.* 2. För uträkningen har använts värdena i tab. 1, utom för strömstyrkorna 1—3 amp., där jag tagit sannolikare värden med ledning av diagr. 1. Med de små absoluta värden på effekten, som förekomma för strömstyrkor mindre än 3 amp. blir avläsningen nämligen mycket vansklig, särskilt ifall apparatens temperatur från början icke är exakt lika med rummets, i vilket senare fall temperaturutjämningen mel-

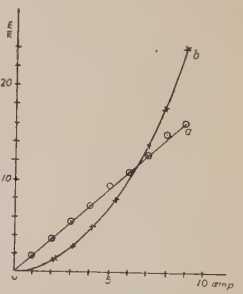
Tabell 2.

Strömstyrka i amp. (s)	Peltier-effekten		Joule-effekten	
	effekt (e)	e/s	effekt (f)	f/s^2
1	1,55	1,55	0,25	0,25
2	3,4	1,70	1,2	0,30
3	5,25	1,75	2,85	0,32
4	6,9	1,73	5,1	0,32
5	9,05	1,81	7,95	0,32
6	10,8	1,80	10,7	0,30
7	12,4	1,77	13,6	0,28
8	14,6	1,83	17,4	0,27
9	16,0	1,78	22,0	0,27

lan apparaten och rummet kan åstadkomma en effekt, som överskrider Peltier- och Joule-effekten tillsammantagna. Vid elevlaborationer, där man vill använda apparaten för kvantitativa mätningar, gör man kanske därför klokast i att börja försöket med strömstyrkan 3 amp.

Som synes av tab. 2 visar sig Peltier-effekten vara proportionell mot strömstyrkan, medan Joule-effekten är proportionell mot kvadraten på strömstyrkan. Detta framgår även synnerligen vackert av diagr. 2.

Man bör icke försumma att fästa elevernas uppmärksamhet på hur olika fenomenet ter sig, om man betraktar det som enkelt eller som sammansatt av två olika effekter. Hade man icke vetat, att det här var fråga om två olika effekter, så hade det ju tett sig mycket gåtfullt, att man, när man skickar strömmen i riktning vismut → antimon, först får en avkylning, som växer med strömstyrkan upp till 3 amp. för att sedan övergå i uppvärmning. Men betraktar man fenomenet som bestående av två effekter, som motverka varandra, så löser sig motsägelsen av sig själv. Man kan för eleverna peka på andra liknande fall, då antagandet av en sammansatt effekt har klarat upp ett svårtytt faktum. Så t. ex. frågan, varför solen attraherar kometkärnan, men repellerar kometsvansen. Denna fråga låter ju, som Arrhenius visat, förklara sig genom antagandet av två motsatta effekter, gravitationen och strålningstrycket, av vilka den ena verkar proportionellt mot en partikels massa, den andra proportionellt mot dess yta. Och frågan är, om icke vår utvidgade kännedom om atomernas byggnad kan komma att ge oss en enklare förklaring på den avvikelse, som gaserna vid högt tryck visa från Boyles lag än den som är uttryckt i Van der Waals ekvation.



Diagr. 2.
(*a*. Peltier-effekt,
b. Joule-effekt.)

En experimentell framställning av Coulombs lag för magnetismen.

Av HELMER BÄCKSTRÖM.

Coulombs lag har alltid vållat lärarna svårigheter, detta gäller såväl om dess magnetiska som dess elektrostatiska version. Att göra en experimentell framställning av densamma med de klassiska försöksanordningarna är ytterst vanskligt. Därför torde också flertalet lärare nöja sig med att diktera lagen utan att på något sätt experimentellt bekräfta densamma, ja en och annan kanske till och med helt radikalt slopar lagen i fråga. Samma tendenser kunna vi även spåra i lärobokslitteraturen. Så företräder exempelvis Tom Molls lärobok den förra riktningen, Gallanders åter den senare.

Förutom den Coulombska lagen plägar i de elementära framställningarna av magnetismen ytterligare en lag erhålla en matematisk formulering, nämligen den lag som säger, att om en liten magnetnål får utföra svängningar under påverkan av olika krafter, så bliva svängningstalens kvadrater proportionella med krafterna. Även denna lag plägar — såvitt författaren är känt — genomgående behandlas utan varje spår av experimentell bekräftelse.

Då författaren föregående år skulle genomgå läran om magnetismen, sökte han efter en utväg att ernå en enkel experimentell framställning av den Coulombska lagen. Den lösning av detta problem, som erhölls, visade sig även innehålla en experimentell bekräftelse av lagen rörande svängningstalen. Då den erforderliga instrumentella utrustningen är ytterst enkel och billig i tillverkning samt experimentet endast tager några minuter i anspråk, har författaren trott, att en framställning av metoden i fråga kunde

vara lämplig på denna plats och eventuellt giva upphov till försök i liknande riktning på andra håll.

För försöket erfordras först och främst en liten magnetnål, upphängd i en kokongtråd. För att störande luftdrag och dylikt ej skall menligt inverka på försöket, bör det svängande systemet skyddas genom att placeras bakom glas. Den anordning härför, som begagnades av författaren, är schematiskt angiven i fig. 1. Den lilla svängande magneten *a* är fäst vid en fin kokongtråd,[1] som är dragen mellan tvenne korkar *b* och *c*. Kokongtråden fästes lämpligen vid korkarna genom att med tillhjälp av en synål föras genom dem; friktionen är sedan tillräcklig för att hålla tråden kvar. Magneten består av ett litet stycke, högst 1 cm långt, av en strumpsticka, som magnetiserats genom dragning med en permanent magnet. Glashöljet *d* utgöres av ett vitt provrör (längd 18 cm, vidd 2,5 cm), i vilket de båda nämnda korkarna placerats på sätt som framgår av figuren. Som fot till det lilla instrumentet har använts en större kork. För att förläna det hela ett prydligare utseende målades korkarna svarta. Hela instrumentet tillverkades av författaren på mindre än en timmes tid och hela materialkostnaden uppgår ju endast till några öre.

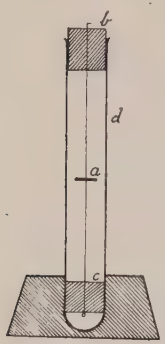


Fig. 1.

Förutom den lilla svängningsapparaten erfordras för försöket fyra *lika starka* magneter av ringa tjocklek men stor längd. Dessa tillverkades av fyra strumpstickor, tagna ur samma paket och sålunda av största möjliga likhet i fråga om dimensioner och materialbeskaffenhet. Alla stickorna magnetiserades samtidigt genom att placeras tätt intill varandra utefter axeln till en solenoid, genom vilken ström leddes (>1 amp.).

Med dessa hjälpmedel kan man nu utföra de för bekräftandet av de båda lagarna erforderliga försöken. Detta till-

[1] Nålen fästes säkert genom att slå ögla på tråden kring densamma samt droppa litet vax över fäststället.

går lämpligen på följande sätt: På något avstånd från nålapparaten placeras en av stickorna. Därvid tillses att stickans ena pol kommer mitt för nålen, medan den andra polen ligger så avlägset från denna som möjligt, detta för att man skall kunna försumma dess inverkan på nålen. Svängningstalet på en viss tid (eventuellt tiden för ett visst antal svängningar) bestämmes.[1] Därefter lägges en ny sticka till den föregående och försöket upprepas. Så fortsätter man att öka stickornas antal och för var gång bestämma svängningstiden. Då kraften, med vilken magnetnålen påverkas, måste vara proportionell med stickornas antal, så har man alla data, som erfordras för svängningslagens verifiering.

För att giva ett begrepp om den använda apparatens tjänlighet må några siffror anföras från ett lektionsförsök. Uppställningen var i enlighet med fig. 2 och avståndet mellan den verksamma magnetpolen hos stickorna och den svängande nålens axel var 5 cm. Tiden för 20 svängningar avlästes med stoppur.

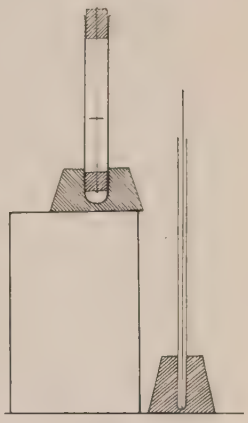


Fig. 2.

Tabell 1.

Stickornas antal (»k»)	Tiden för 20 svängningar (t sekunder)			$t \cdot \sqrt{k}$
	avlästa värden		medeltal	
1	21,0	20,5	20,8	20,8
2	15,0	14,0	14,5	20,5
3	11,8	11,4	11,6	20,1
4	10,6	11,0	10,8	21,6

Som synes av tabellens sista kolumn är produkten $t \cdot \sqrt{k}$ konstant, vadan man kan skriva:

$$\frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{k_2}} = \frac{t_2}{t_1} \quad \ldots (1) \quad \text{eller} \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2} \quad \ldots (2)$$

[1] Nålen försättes lämpligen i svängning genom att föra ett järnföremål (t. ex. en nyckel) i närheten av densamma för ett ögonblick.

Inför man så svängningstalet n, som ju är inverterade värdet av svängningstiden, så erhåller formeln följande från läroböckerna välbekanta utseende:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2}.$$

För försökets diskussion är det lagom med fyra stickor. Vid jämförelse mellan tabellens första och tredje kolumn finner man då omedelbart:

a) När kraften ökas, minskas svängningstiden,

b) ändringen av svängningstiden går långsammare än kraftens förändringar,

c) en ökning av kraften till ett fyra gånger större belopp giver en minskning av svängningstiden till hälften av dess förra belopp.

I och med denna sista iakttagelse är lagens formulering praktiskt taget klar (se formlerna!) och man har sedermera endast att pröva det återstående siffermaterialet, vilket göres genom beräkning av produkten $t \cdot \sqrt{k}$, vars talvärden införas i tabellens fjärde kolumn. Den formulerade lagens riktighet bekräftas därvid.

Härefter kan man övergå till ett studium av avståndets inverkan på kraftens storlek för att sålmedelst komma fram till den Coulombska lagen. Kraftens ändring studeras genom svängningsförsök. Som exempel må några siffror från ett lektionsexperiment anföras. Dessa äro erhållna i direkt anslutning till det ovan angivna siffermaterialet.

Enligt sista raden av tabellen hade vi funnit, att fyra stickor på avståndet 5 cm från nålen gav en tid av 10,8 sek. för 20 svängningar. Vid liknande bestämningar på 10 cm avstånd befanns tiden för 20 svängningar vid två olika försök vara resp. 21,0 och 21,2 sek., d. v. s. i medeltal 21,1. Vid avståndets fördubbling erhölls alltså även en fördubbling av svängningstiden, men detta senare betyder ju enligt den nyss funna lagen, att vi numera hava med en fyra gånger mindre kraft att göra. Därmed är saken klar, och den nya erfarenheten kan lämpligen uttryckas

så, att kraften, med vilken den lilla nålen påverkas, *är omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet.* Detta är emellertid i själva verket ingenting annat än Coulombs lag, endast att denna icke talar om en magnetnål (med två poler) utan om *en* ensam pol. Att satsen kan utsträckas även till detta fall inses utan vidare. Vid magnetnålen studeras nämligen ett kraftpars storlek under olika omständigheter. Minskas kraftparet till fjärdedelen, då stickan (magnetpolen!) avlägsnas till dubbla avståndet, så måste detta naturligtvis även gälla om kraftparets båda krafter. Den Coulombska lagen gäller alltså för var och en av nålens poler.

Sedan Coulombs lag på detta sätt härletts är det måhända lämpligt att göra några teoretiska betraktelser i anslutning till en med järnfilspån åstadkommen bild av fältet kring en strumpstickas ena pol. Är stickan lång, så finner man, att kraftlinjerna utgå rätlinigt från polerna åt alla håll, detta givetvis under förutsättning att polavståndet är så stort, att någon avböjning av kraftlinjerna icke kommer i fråga. Utgå emellertid kraftlinjerna rätlinigt och jämnt fördelade åt alla håll, så betyder detta, att det antal kraftlinjer, som träffa en viss mot kraftlinjen vinkelrät liten yta, minskas proportionellt med kvadraten på avståndet. Betraktas kraftlinjerna som elastiska trådar, så måste »kraften» vara proportionell med trådtätheten och alltså avtaga med kvadraten på avståndet, vilket står i överensstämmelse med vad vi nyss funnit på experimentell väg.

Innan denna uppsats avslutas må ytterligare några ord ägnas åt den använda apparaten:

Av tabellen framgår att det av författaren under en ledig stund mellan ett par lektioner tillverkade svängningsinstrumentet gjorde ganska raska svängningar, vadan det var mindre lätt att hinna räkna dem. Denna svaghet är emellertid lätt att avhjälpa genom att öka nålens tröghetsmoment. Detta kan ske genom att anbringa små vaxklumpar eller dylikt på densamma.

Rörande stickornas placering må anmärkas att författaren

för detta ändamål gjorde sig ett stativ av ett i en kork infört glasrör, varvid korken fick tjäna som fot; röret var så smalt, att de fyra stickorna nätt och jämnt samtidigt kunde nedföras i detsamma. Då stickornas poler torde ligga på c:a $\frac{1}{12}$ av deras längd ifrån spetsarna, så är det lätt att medelst klossar eller dylikt placera nålinstrumentet så, att nålen kommer i jämnhöjd med stickornas ena polläge (se fig. 2).

Stickornas avstånd från nålen får naturligtvis ej göras så stort, att polen n:r 2 börjar konkurrera med polen n:r 1 i fråga om påverkan på nålen. Det torde därför icke vara tillåtet att överskrida de avstånd, som ovan angivits, såvida man icke skaffar sig magnetstavar av större längd än den för strumpstickor vanliga. Detta förbud för längre avstånd måste upprätthållas även av den grund, att en smal järnsticka vid magnetisering icke erhåller så särdeles stor polstyrka, även om man härför begagnar sig av stark ström. Önskar man emellertid att tillverka det hela i större skala, så kan man naturligtvis även öka avstånden. Det kunde exempelvis tänkas, att man magnetiserade 5 à 10 mm järnstänger av 1 m längd eller så omkring. Då kunde även större magnetnål tillåtas, så att klassen i dess helhet kunde räkna dess svängningar. Det är dock under alla omständigheter nödvändigt att använda tråduppphängning, då de vanliga nålarna på pivå visa alltför stor dämpning, varför man endast hinner iakttaga ett fåtal svängningar, innan nålen kommer till ro. Härav blir naturligtvis noggrannheten i svängningstalets bestämning starkt nedsatt, vadan värdet av försöket i sådant fall blir mindre.

Kemiska notiser.

Av G. STARCK.

IX. Kvantitativ syntes av vatten.

Bestämningen av vattnets viktsammansättning genom reduktion av kopparoxid och vägning av syre och vatten torde vara ett synnerligen vanskligt försök, om den utföres exempelvis i överensstämmelse med fig. 3 i Molls lärobok för gymnasiet I. Ingen har väl kunnat undgå den obehagliga erfarenheten, att den bildade vattenångan delvis diffunderar bakåt och kondenseras vid *A* (samma fig.). Orsaken härtill är klar: visserligen bildas för varje vätgasmolekyl en molekyl vattenånga, men då denna kondenseras, där temperaturen är lägre, så upphör gasströmmen strax bakom kopparoxiden, om vätgasen strömmar med måttlig hastighet, vilket den av flera skäl måste göra. Förhållandena i glasröret torde gestalta sig så, att vätgasen strömmar fram i den övre hälften av röret, medan vattenångan, 9 gånger så tung, breder ut sig på bottnen. Försöket att med en låga driva bort vattenbeslaget brukar vanligen resultera i att det flyttar sig ännu mer bakåt och till sist slår sig ned på proppen, otillgängligt för alla åtgärder utom en tålmodig väntan. I regeln torde man, åtminstone enligt författarens erfarenhet, göra stora förluster av vatten.

Nedanstående, alternativa former av förbränningsröret avhjälpa denna olägenhet och göra försöket ytterst enkelt att sköta; den erforderliga tiden för hela experimentet med uträkning och diskussion kan beräknas till $1^1/_4$—$1^1/_2$ timme.

Det ena röret, avbildat i fig. 1, är endast 13 cm långt och övriga dimensioner i överensstämmelse därmed. Det får sålunda bekvämt rum på vågen och väges med utvidg-

ningen till hälften fylld med småkornig kopparoxid resp. koppar. Tilledningsröret för vätgasen är kapillärt, varigenom diffusion bakåt av vattenånga helt uteslutes. I avledningsröret inlägges en tämligen grov (2 mm) aluminiumtråd, som räcker från kulan genom ligaturen ända in i

Fig. 1.

absorptionskärlet för vattenångan. Denna tråd förhindrar effektivt kondensation av vattenånga i röret och den anslutna ligaturen på grund av sin höga värmeledningsförmåga (cirka 0,6 av kopparens) och förändras i motsats mot koppar ej vid upphettning.

Ett vanligt misstag vid detta och liknande försök är att temperaturen hålles för hög. Vid 300° reduceras kopparoxid glatt av vätgas, och en stegring av temperaturen tjänar till intet, medför blott, att koppar eller kopparoxid vid glödgning smälta in i glaset. Röret behöver därför icke tillverkas av svårsmält glas, ehuru detta kan vara lämpligt på grund av dess större okänslighet för temperaturväxlingar. Det upphettas av en platt låga av kulans längd på minst 2 cm:s avstånd från kulan. Denna låga behöver under försöket

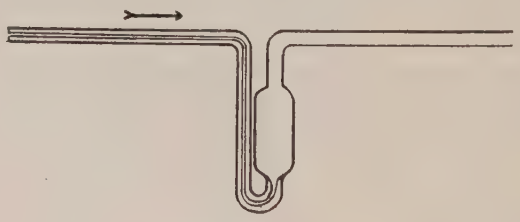


Fig. 2.

icke flyttas. Väl igångsatt sköter försöket sig sålunda självt, och det enda man har att iakttaga är att före de avslutande vägningarna suga luft genom rör och absorptionsapparat; denna sugning skall ske i vätgasens riktning och kan göras med munnen och med användning av en slang. Luften behöver icke särskilt torkas.

I några av försöken har använts ett rör enligt fig. 2, tillverkat av lättsmält glas. För dess upphettning (och för andra försök) konstruerades en liten täljstensugn enligt fig. 3. Den utgöres av ett cylindriskt block med en central urborrning för den apparat, som skall upphettas, och en ränna för till- och avledningsrör. Fem vertikala rör, som även genomsätta locket, sörja för att lågan omspolar mittpartiet; ett sjätte hål, icke genomgående, är avsett för termometern. Med en vanlig brännare kommer man här lätt upp till 400° och kan för övrigt hålla temperaturen något så när konstant. Försöket, utfört med denna anordning, behöver om möjligt ännu mindre tillsyn än med den först angivna.

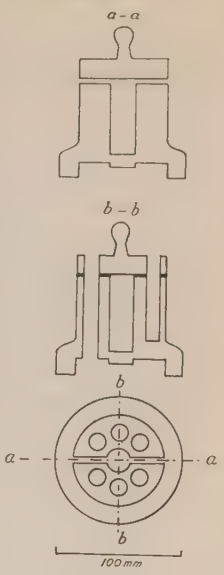


Fig. 3.

Tiden för de försök, vilkas resultat anges här nedan, var $1—1^1/_4$ tim., varav cirka 45 min. för upphettningen, resten för vägningar och avsvalning. Försöken 3—6 utfördes med röret fig. 2.

N:r	1	2	3	4	5	6
% syre	88,41	89,17	88,76	88,80	88,84	88,61
fel	— 0,40	+0,34	— 0,05	— 0,01	+0,03	— 0,20

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Ett sätt att hålla tunn gummihinna elastisk under en längre tid.

Vid höstterminens början är det ofta en källa till förargelse för fysikläraren i klass 4 eller ring I, som skall demonstrera lagen om vätskors tryck, att de för försöket avsedda trattrören med gummihinna över icke äro i ordning. Undertecknad har gått tillväga på följande sätt för att alltid ha apparaten färdig till bruk: Jag kokar en à två liter vatten och tillsätter salicylsyra till mättning (därtill åtgår bara ett par gram). I detta vatten kan gummit hålla sig år efter år. För att få vattenpelaren i trattrören mera synlig avdelar jag den del av salicylsyrelösningen, som jag sedan ämnar ifylla trattrören och tillsätter därtill ett par droppar järnklorid. Då uppstår en intensiv röd färgning. Efter försökets utförande få rören med vätska i stå kvar nere i salicylsyrelösningen. Man lägger endast en glasskiva över glasbägaren för att icke vattnet skall avdunsta. Järnkloriden diffunderar endast ytterst svagt genom gummihinnan. Skulle trattrören nå upp över bägarens kant, bör man tilltäppa dem upptill med en bit gummislang och en liten bit glasstav. *A. Frendel.*

Bokanmälan.

Magnus Lemoine: *Handledning i experimentell Fysikundervisning.*

Vår litteratur lider ingalunda någon brist på handledningar vid fysiska experiment, men i allmänhet äro dessa

avsedda att sättas i lärjungarnas händer och uteslutande beräknade på dessas egna laborationer, under det att man för lärarens demonstrationer så gott som uteslutande varit hänvisad på utländska arbeten.

I detta avseende är föreliggande arbete något för vår svenska litteratur nytt: det är alls ej avsett för lärjungarna, utan huvudsakligen för unga lärare såsom hjälp vid anordnandet av såväl demonstrationer som laborationer. Att därvid även äldre lärare däri kunna finna många goda uppslag, särskilt på fysikens nyare delar, säger sig självt.

Vad som härvid möjligen skulle kunna anmärkas, är att dessa båda arter av experiment ej skarpt hållas isär, utan att det i huvudsak är överlämnat åt den enskilde lärarens omdöme att bedöma vilka experiment skola behandlas som demonstrationer, och vilka som lämpa sig för lärjungelaborationer. Detta kan möjligen verka något förvillande på en helt ung lärare, men snart nog torde han finna sig tillrätta därmed, i synnerhet som det väl knappast kan komma i fråga att utföra bokens alla försök, utan ett urval i varje fall måste göras.

För övrigt lämnar boken i många avseenden långt mer än av titeln framgår, i det att den även ger mycket utförliga anvisningar om lokalerna och deras inredning samt en stor mängd beskrivningar på nya och praktiska apparater, många av dessa sammanställda av utgivaren själv.

Vad själva försöken och anvisningarna för deras utförande beträffar, så förefaller framställningen synnerligen vederhäftig och gör intryck av att förf. själv verkställt varje experiment. Det enda undantag härifrån, som anmälaren funnit, är experimentet med papperslyktan (sid. 118), vilket även finnes i Molls Fysik. Angående detta experiment har jag, och även mina kamrater, funnit, att det lika ofta ger motsatt resultat mot det önskade, som det ger detta senare, sannolikt beroende på, att lyktans papper, i stället för att verka som ledare, ofta kan verka som isolator i förhållande till de trä- eller metallringar som sammanhålla det. I detta fall blir det hela en kondensator, och vid lyktans

sammanfallande minskas elektroskopets utslag i stället för att ökas. Om således detta försök överhuvudtaget skall anföras, så fordras detaljerade föreskrifter om huru man skall få det att lyckas. Men detta är blott ett enstaka undantag, och i allmänhet äro förf:s anvisningar fullt tillräckliga. En annan liten oegentlighet, som anmälaren observerat vid genomläsningen av boken, är att vid rubriken »ledningstrådar» (sid. 134) ingenting är nämnt om pol-skor, vilket dock är en ej obetydlig detalj, som väl skulle förtjäna ett omnämnande.

I övrigt förtjänar förf. särskilt beröm för att han ej skattat åt den ofta hörda åsikten, att man aldrig kan få nog av experiment, utan tvärtom ofta framhåller såväl att ett fåtal, väl genomarbetade försök är bättre än många flera som man ej ger sig tid att grundligt behandla och »som verka förvillande på lärjungen», som även att en hänvisning till lärjungarnas dagliga erfarenhet ofta är nyttigare än ett aldrig så väl utfört försök på samma sak.

På det hela tro vi, att arbetet skall bliva av stor nytta såväl för äldre som yngre lärare, och givet är att det ej får saknas i något läroverks referensbibliotek.

M—r.

Matematiska och Fysikaliska uppgifter.

175) En person håller vad och satsar 2 kr. på att han i ett kast med två tärningar skall få upp antingen 4, 5 eller 6 ögon. Hur mycket kan hans motpart satsa för att båda skola få lika vinstchanser?

176) En triangel ABC är given, samt två godtyckliga punkter P och Q i rymden, sådana att $\frac{PA}{QA} = \frac{PB}{QB} = \frac{PC}{QC}$.

a) Visa, att PQ alltid måste råka en viss rät linje.

b) Om P är given, sök orten för Q.

177) Om a och b äro två sidor i en triangel, α och β motstående vinklar och $a > b$, så är $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{a}{b}$. *X.*

178) I en olikbent triangel är en vinkel 60°, och en närliggande sida mätes av primtalet $n > 2$. Hur stora äro de övriga sidorna, om de mätas av hela tal?

179) 10 l luft, till $^3/_4$ mättad med vattenånga, befinner sig vid 76 cm tryck och 60° temp. Om trycket ökas till 106 cm och temperaturen sänkes till 10°. Hur stor blir volymen, och hur mycket vattenånga utfaller?

Ångans sp. vikt $= \frac{5}{8}$, luftens sp. vikt $= 0{,}001293$, mättad vattenångas tryck vid $60° = 14{,}94$ cm, vid $10° = 9{,}20$ cm. *M—r.*

180) En ström av 0,8 amp. genomgår ett svavelsyrebad av 5 Ω motstånd. Hur stor del av den energi, som strömmen utvecklar i badet, kommer till synes såsom kemisk energi?

1 amp. utfäller 0,01044 mg H pr sek., Joulska konstanten 0,24, och vattnets termokemiska formel är

$$H_2 + O = H_2O + 68\,340 \text{ grkal.} \qquad M—r.$$

Lösningar till uppg. i häft. 4. 1923—24.

163. *Diskutera och upprita kurvorna*

a) $y = \pm\sqrt{\sin x} \pm \sqrt{1 - \sin x}$,

b) $y = \pm\sqrt{\sin x} \pm \sqrt{1 + \sin x}$.

a) Genom bortskaffande av rotmärkena erhålles

$$f(x, y) = (y^2 - 1)^2 - 4\sin x(1 - \sin x) = 0, \quad . \quad . \quad (1)$$

varav $$\sin x = \tfrac{1}{2}(1 \pm y\sqrt{2 - y^2}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

På grund av kurvans periodicitet kunna vi inskränka undersökningen till intervallet

$$2\pi \geqq x \geqq 0.$$

Inom detta intervall är y reellt endast i delintervallet

$$\pi \geqq x \geqq 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Av (2) framgår därjämte, att x är reellt endast inom intervallet

$$\sqrt{2} \geqq y \geqq -\sqrt{2}. \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Då (1) innehåller endast jämna digniteter av y, ligger kurvan symmetriskt kring x-axeln. Då vidare $\sin x = \sin(\pi - x)$, ligger kurvan även symmetriskt kring linjen $x = \frac{1}{2}\pi$ och har således en medelpunkt i $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Kurvans viktigaste punkter framgå av nedanstående tabell:

x	$++$ y_α	$+-$ y_β	$-+$ y_γ	$--$ y_δ
$0 \smile$	1	-1	1	-1
$\frac{1}{6}\pi$	$\sqrt{2}\frown$	0	0	$-\sqrt{2}\smile$
$\frac{1}{2}\pi$	1	1	-1	-1
$\frac{5}{6}\pi$	$\sqrt{2}\frown$	0	0	$-\sqrt{2}\smile$
$\pi\frown$	1	-1	1	-1

Maximipunkter äro i tabellen angivna med tecknet $\frown$, minimipunkter med tecknet $\smile$.

Kurvans dubbelpunkter erhållas ur ekvationerna

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -4\cos x\,(1 - 2\sin x) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y\,(y^2 - 1) = 0, \end{cases}$$

vilka i förening med (1) giva de redan förut funna punkterna $(\frac{1}{6}\pi, 0)$, $(\frac{1}{2}\pi, \pm 1)$, $(\frac{5}{6}\pi, 0)$. Tangenternas riktningar i dessa punkter erhållas ur ekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 =$$

$$= 4(\sin x + 2\cos 2x) + 4(3y^2 - 1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

vilken ger, för $y=0$,

$$\frac{dy}{dx}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{6}$$

och för $y=\pm 1$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Kurvan har, såsom fig. 1 visar, formen av två snett korslagda ovaler.

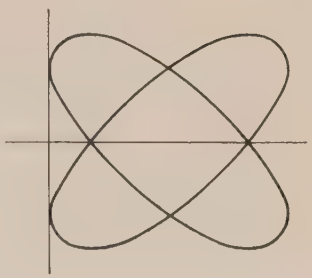


Fig. 1.

b) Ekvationen ger, löst med avseende å x,

$$\sin x=\left(\frac{y^2-1}{2y}\right)^2.$$

Kurvan är reell endast inom intervallet $\pi \geqq x \geqq 0$

och därmed kongruenta intervaller (mod. 2π). Den ligger symmetriskt kring x-axeln och linjen $x=\frac{1}{2}\pi$. Antages $y>1$, leder villkoret

$$y^2-1 \leqq 2y$$

till

$$y \leqq \sqrt{2}+1.$$

Antages åter y positiv och <1, leder villkoret

$$1-y^2 \leqq 2y$$

till

$$y \geqq \sqrt{2}-1.$$

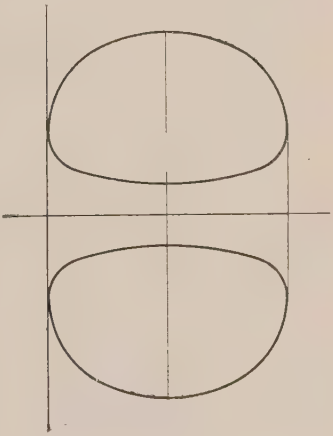


Fig. 2.

Kurvan ligger således för positiva y-värden mellan de med x-axeln parallella tangenterna

$$y=\sqrt{2}+1$$

och för negativa y-värden mellan tangenterna

$$y=-(\sqrt{2}+1).$$

Den kan lätt uppritas med ledning av nedanstående tabell.

x	$++$ y_α	$+-$ y_β	$-+$ y_γ	$--$ y_δ
0 ⌣	1	-1	1	-1
$\frac{1}{2}\pi$	$\sqrt{2}+1$ ⌢	$-(\sqrt{2}-1)$ ⌢	$\sqrt{2}-1$ ⌣	$-(\sqrt{2}+1)$ ⌣
π ⌢	1	-1	1	-1

Kurvans utseende framgår av fig. 2. *Iter.*

Även löst av *X*.

164) *På hur många nollor slutar talet* $\underline{|5^n}$*?*

Då 2 ingår såsom faktor i talet många fler gånger än 5, så behöver man blott undersöka, hur många gånger 5 ingår. Nu innehåller vart femte tal i talserien 5 såsom faktor, vart 25:e 5^2 o. s. v. Hela antalet faktorer 5 i $\underline{|5^n}$ blir således

$$s=1+5+5^2+\ldots+5^{n-1}=\tfrac{1}{4}(5^n-1). \qquad \textit{Iter.}$$

En i viss mån generellare lösning är följande:

Vi undersöka allmänt, hur många gånger primtalet p innehålles i $\underline{|m}$. Om med beteckningen $[x]$ förstås det största hela tal, som är $\leqq x$, så finner man, att det sökta antalet är

$$N(m,p)=\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+\ldots,$$

varest $\left[\frac{m}{p^r}\right]=0$, så snart $p^r>m$. Av talen 1, 2, 3, . . ., m äro nämligen $\left[\frac{m}{p}\right]$ delbara med p, $\left[\frac{m}{p^2}\right]$ delbara med p^2, $\left[\frac{m}{p^r}\right]$ delbara med p^r o. s. v.

Alltså är för $m=5^n$, $N(5^n,5)=5^{n-1}+5^{n-2}+\ldots+1=\frac{5^n-1}{4}$, vilket då även betyder antalet nollor. *X*.

Anm. En insändare har givit oriktigt svar, i det han förväxlat $\underline{|5^n}$ med $(\underline{|5})^n$.

165) *I triangeln ABC är* $\beta = 2\alpha$. *O är den inskrivna cirkelns medelpunkt. Sök förhållandet mellan avståndet från B till CO och sträckan AO.*

Fällas normalerna AA_1 och BB_1 mot CO, som är bissektris i γ, så blir

$$\frac{BB_1}{AA_1} = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha},$$

men

$$\frac{AA_1}{AO} = \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha+\pi-3\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

Således

$$\frac{BB_1}{AO} = \frac{1}{2}.$$

Iter.

166) *Att med passare, men utan linjal, dela en given cirkelperiferi i fyra lika delar.*

Antag, att cirkeln med radien r skall delas från en punkt A (fig. 3) på periferien. Man avskär då på cirkelperiferien styckena $AB = BC = CD$ med cirkelöppningen r. A och D äro då diametralt motsatta punkter på cirkeln. AC är sidan i den inskrivna liksidiga triangeln $= r\sqrt{3}$. Cirklarna med A och D till medelpunkter och radien AC skära varandra i E (och E_1), vars avstånd från cirkelns medelpunkt O är $OE = r\sqrt{2}$. Cirkeln kring A (eller D) med radien OE måste då skära cirkelperiferien i ändpunkterna av den mot AD vinkelräta diametern.

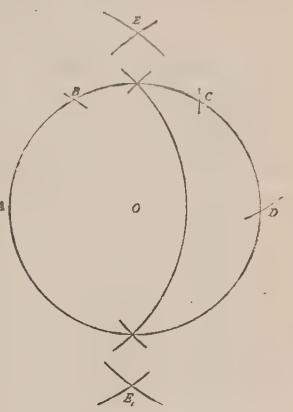


Fig. 3.

Om den givna cirkelns medelpunkt icke är känd, måste den först konstrueras, vilket kan ske på följande sätt:

Kring en godtycklig punkt P (fig. 4) på cirkelperiferien uppritas en cirkel, som skär den givna cirkeln i två punkter Q, Q_1. Med dessa punkter till medelpunkter uppritas cirklarna genom P. Dessa cirklar skära varandra i en andra

punkt R. Med R till medelpunkt uppritas en cirkel genom P. Denna cirkel skär den först uppritade i två punkter S, S_1 (se anmärkningen nedan). Med S och S_1 till medelpunkter uppritas cirklarna genom P. Dessa cirklar skära varandra i den sökta medelpunkten O.

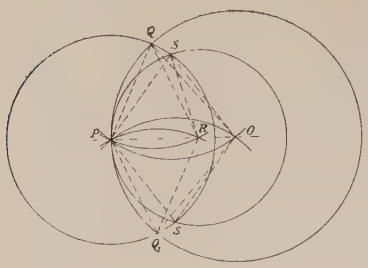


Fig. 4.

Bevis: Emedan

$$\triangle PQR \cong PQ_1R,$$

måste PR vara en diameter i den givna cirkeln. Cirkeln kring R tangerar således den givna cirkeln i P. Då vidare $\triangle PSO \cong PS_1O$, måste PO vara en diameter i cirkeln R och således sammanfalla med PR, varav följer, att $OQ = OQ_1$. Då vidare $\triangle SPO \sim RPS$, har man

$$PO : PS = PS : PR,$$

således, då $PS = PQ$, även

$$PO : PQ = PQ : PR,$$

varav följer, att även $\triangle OPQ \sim QPR$ och således

$$OP = OQ = OQ_1.$$

Denna konstruktion skiljer sig endast med två operationer från den geometrografiska (jfr t. ex. Rouché et de Comberousse, Traité de Géométrie 1, 1922, p. 520, probl. XII).

För konstruktionens möjlighet fordras, att radien i cirkeln kring P tages större än halva radien i den givna cirkeln, en omständighet, som möjligen *teoretiskt* i någon mån förringar konstruktionens värde. Praktiskt är den betydelselös, då cirkeln kring P för övrigt kan tagas hur stor som helst, blott den skär den givna cirkeln. *Iter.*

167) *Ekvationen*

$$x^4 - (43+2i)x^3 + (512+83i)x^2 - (1213+902i)x + \\ + 391 + 1173i = 0$$

har två reella rötter. Lös ekvationen.

För reella x sönderfaller ekvationen i de båda

$$\begin{cases} x^4 - 43x^3 + 512x^2 - 1213x + 391 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1) \\ \quad - 2x^3 + 83x^2 - 902x + 1173 = 0 \quad . \quad . \quad (2) \end{cases}$$

Multipliceras (1) med 3 och (2) subtraheras, så fås efter division med x:

$$3x^3 - 127x^2 + 1453x - 2737 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Multipliceras (3) med 2 och (2) med 3, så fås genom addition efter division med -5

$$x^2 - 40x + 391 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

vilken giver de båda reella rötterna $x_1 = 23$, $x_2 = 17$.

Divideras den ursprungliga ekvationen med vänstra ledet av (4), så fås

$$x^2 - (3+2i)x + (1+3i) = 0,$$

vilken giver de båda imaginära rötterna $x_3 = 2+i$, $x_4 = 1+i$.

Löst av *X* och *Iter*.

168) *En kanon utskjuter en kula med begynnelsehastigheten v. I två olika riktningar, som med horisonten bilda vinklarna α och β, träffas en viss punkt A. Beräkna härav punkten A:s höjd över marken och dess horisontella avstånd från kanonen. Luftmotståndet försummas.*

Kanonen i det rätvinkliga koordinatsystemets origo, x-axeln horisontell. A:s koordinater x och y. $\varphi = \alpha$ och $\varphi = \beta$ äro då lösningar till ekvationen

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \tfrac{1}{2} g \frac{x^2}{v^2 \cos^2 \varphi}$$

eller $$\operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{2v^2}{gx} \operatorname{tg} \varphi + \frac{2v^2 y}{gx^2} + 1 = 0.$$

Alltså är

$$\frac{2v^2}{gx} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta, \text{ d. v. s. } x = \frac{2v^2}{g} \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

samt $$\frac{2v^2 y}{gx^2} + 1 = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

som ger $$y = -\frac{2v^2}{g} \frac{\cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

X.

Även löst av *Iter*.

Till redaktionen insända böcker.

Friman och Holm. *Elektricitet och Magnetism.* Bokförlaget Natur och Kultur. 141 sid.

Adolf Sigfrids. *Lärobok i elementär Elektroteknik.* H. II. Maskiner och mätare. Ivar Hæggströms boktryckeri & bokförlags A. B. 1923. 208 sid. Kr. 6: —.

Lars Vegard. *Stoffets Opbygning och atomenes indre.* Olof Norlis Forlag, Kristiania 1924. 79 sid. Kr. 1: 50.

Axel Larsson. *ABC i Radio.* Lindblads förlag. 201 sid.

J. Herrmann. *Elektroteknik, starkströmsteknikens grundbegrepp. II. Likströmsteknik.* Aukt. övers. från tyskan av Svenfredrik Möller. Sthlm, Chelius & C:i. 140 sid.

Sigurd Eriksson. *Övningsuppgifter till grunderna i differential- och integralräkning.* Lindska bokhandeln, Örebro. 121 sid. Kr. 3: 50.

T. E. Aurén. *Fysikaliska tabeller.* Graves förlag. 36 sid.

Nils Royen och Otto Linton. *Grafostatik samt Inverkan av rörliga kraftsystem.* 334 sid. Kr. 28: 50. Arbetet är en del av det på Bonniers förlag utkommande sammelverket: *De Tekniska Vetenskaperna.*

H. J. Pihl. *Undervisningsvejledning i Regning for Mellemskolen.* Gyldendalske Boghandel. 216 sid.

E. S. Johansen. *Grundris af den almindelige Bevægelselære.*

P. G. R. Roos. *Mekanik för navigationsskolorna, tekniska skolor och självstudium.* 2:a uppl. Sthlm 1924. Ivar Hæggström. 245 sid.

H. Jepsen & O. A. Smith. *Mekanik for Realskoler og seminarier.* Köbenhavn 1924. Jul. Gjellerup. 61 sid.

Rättelser till föreg. häfte.

Sid. 41 rad 5—6 nedifr. skola läsas:

$$OR = a \operatorname{tg} 2v \quad \ldots \quad 1)$$

och $OG = a_1 \operatorname{tg} \varphi = a_1 \cot v \quad \ldots \quad 2)$

» 47 » 14 nedifr. står: framställning läs: användning

» 50 » 12 » » tillverkad » tillverkat

» 50 » 7 » » -substansblandning, läs: -substansblandningen,

» 51 » 6—12 uppifr. borttagas citationstecknen.

Det Euklideiska systemet i geometrin.

Av HENRIK PETRINI.

För mången lärare i geometri synes Euklides' anordning av lärosatserna vara ganska godtycklig och osystematisk samt i många avseenden onödig och i behov av en betydande förenkling. I andra länder har man därför redan tidigt försökt sig på med att bygga upp geometrin från andra utgångspunkter, medan man i Sverge ännu hade kvar den gamla Euklides. De äldre av oss komma nog ihåg, hurusom för omkring 40 år sedan det även hos oss blåste upp en antieuklideisk vind, varvid framhölls, att orsaken till att vi svenskar stodo så långt tillbaka för utlänningen var den, att vi i skolorna ännu använde den gamla föråldrade Euklides, medan man överallt i andra länder använde modärnare läroböcker.

Hur kom det sig då, att vi voro så långt bakefter? Granskar man de utländska läroböckerna noga i sömmarna, torde svaret ej kunna bli mer än ett: Euklides har hållit sig kvar i Sverige längre än i andra länder, emedan vi ha haft förmånen av en så utmärkt edition av hans verk som Strömers.

Försöken att förkorta framställningen för skolans behov ha hos oss lyckligtvis börjat med att ändra om själva bevisen med användning av modärnare uttrycksmedel, men ej att ändra om själva systemet, och så föddes Lindmans edition av Euklides I—IV, vilken så gott som fullständigt utträngde Strömers. Det var under denna period som den nämnda opinionsstormen mot Euklides utbröt, och spillrorna av det gamla mästerverket räddades av Vinell, som tillmötesgick de framställda kraven på förenkling.

Den närmaste anledningen till den fullkomligt omotiverade beskyllningen mot svenskarna för efterblivenhet torde ha varit utgivandet av prof. Petersens geometri, i vilken danskarna fingo en ny lärobok, som var uppbyggd efter ett helt nytt system. Denna efterföljdes snart nog av en liknande bok av Asperén. Sedan dess ha olika författare försökt sig på att framställa geometrins grunder på diverse olika sätt.

Granskar man nu de förnämsta läroböckerna vid sidan av Strömers edition av Euklides, så är det först en sak som slår en med häpnad: Den gamle alexandrinarens logiska skärpa och den modärne européens brist därpå. Först må då påpekas, att så gott som varenda en av de senare geometriska författarna har meddelat något rent felaktigt bevis. Själva den store matematikern Legendre, som under nära ett århundrade varit för Frankrike vad Euklides under samma tid varit för oss, har i sin lärobok i geometri ett felaktigt bevis, nämligen då han tror sig kunna bevisa det s. k. »12:e axiomet».

Kommer så en dansk professor, långt efter det att frågan om det 12:e axiomet kan anses vara utredd, och grundar hela geometrin på ett falskt bevis för detta axiom. Interdum dormitat cæcus Homerus, det är uttytt: det kan förlåtas en banbrytande ande, om han råkar till att göra en blunder, men dii minorum gentium, som trampa hans spår, böra åtminstone se upp, när de själva inte kunna komma med något väsentligt nytt. Emellertid hade Asperén i sin första upplaga låtit förleda sig att medtaga Peterséns felaktiga bevis, som dock avlägsnats i de följande. I förbigående må omnämnas, att en vidlyftig geometri av Hellström även bygger på ett felaktigt bevis, men av en annan sats. Och de förenklingar av Euklides, som vidtagits av Vinell, ha åstadkommits så gott som samt och synnerligen genom bristande stränghet i bevisen.

Däremot kan man hos Euklides själv inte upptäcka en enda logisk felaktighet, utan är hans system uppbyggt med den mest fulländade logiska skärpa på varenda punkt.

Detta är så mycket märkligare, som han var den förste och grundläggaren av hela systemet, medan de andra hade ett så fulländat system att se upp till. De många misstagen av senare tiders matematici visa tydligen, huru svårt det är att bygga upp ett logiskt geometriskt system, men de lära oss också att vara noga på vår vakt mot oss själva, när vi häva oss upp emot den store mästaren och försöka kritisera hans system ur andra synpunkter. När man sålunda vill förenkla systemet genom indragandet av en eller annan sats, som förefaller onödig, så har man först att noga pröva, om icke framställningens exakthet då kommer att lida därpå.

Så t. ex. bevisas i I: 16, att yttervinkeln är större än var och en av de motstående inre vinklarna, men i I: 32 bevisas, att den förra är lika med de senares summa. Om man nu kunde bevisa den senare satsen oberoende av den förra, så följde ju I: 16 självklart ur I: 32. Det torde vara denna tankegång, som givit upphov till försöken att uppbygga geometrin med utgångspunkt från det 12:e axiomet, med eller utan ett falskt bevis för detsamma. På detta sätt vinnes visserligen en sats, men vinsten är skäligen minimal i förhållande till förlusten. Någon särskild anledning att knappa in på satsernas antal finns inte, tvärtom. Man ger ju lärjungarna en massa övningsexempel utom själva satserna i avsikt att ge dem mera vana vid geometriskt tänkande, och då är ju Euklides I: 16 så god som någon annan övningssats. Och å andra sidan får man, såsom förut påpekats, vara noga aktsam, innan man försöker förbättra Euklides från systematisk synpunkt.

I själva verket förlorar man i allmängiltighet hos satserna I: 16—I: 26, om man tar med det 12:e axiomet för tidigt. Ty alla satser t. o. m. I: 26 gälla ej blott för figurer uppritade på en plan yta utan även för figurer uppritade på en del av en klotyta. Sålunda får man såväl första och andra kongruensfallen som tredje och fjärde alldeles till skänks för sfäriska trianglar. Vid undervisningen borde detta sistnämnda förhållande påpekas mera än vad i all-

mänhet är fallet, helst det visat sig kunna väl senteras av lärjungarna.

Ur rent systematisk synpunkt är det dessutom i allmänhet en fördel att bevisa satserna med minsta möjliga antaganden, där detta kan ske utan större olägenhet, vadan även ur denna synpunkt Euklides' metod är att föredraga i denna punkt.

Ett annat försök att förenkla Euklides består däri, att man inrangerar bland axiomen den satsen, att summan av två sidor i en triangel är större än den tredje. Om denna förenkling gäller detsamma som om den föregående, nämligen att den är skäligen minimal. Däremot är olägenheten ur systematisk synpunkt ändå större, då ju denna sats ingalunda är ett axiom, utan den kan faktiskt bevisas. Härigenom införes en oreda redan i axiomens rad. Till denna kategori hör en för övrigt mycket förtjänstfull geometri av Josephson, och själv har jag försökt uppbygga geometrin på betraktelsen av geodetiska linjer på en yta.

Men vad som i främsta rummet ger det Euklideiska systemet en stadga och klarhet utan like är Euklides' princip att *utföra varje konstruktion och bevisa dess riktighet, innan den får användas i ett bevis.* Dessa s. k. problem äro av konstitutiv natur för det Euklideiska systemet. Vart och ett av dem innebär nämligen ingenting mer och ingenting mindre än ett *existensbevis*, nämligen av en mittpunkt, en bissektris, en normal etc. och dessutom ett uppvisande av att dessa saker kunna konstrueras med tillhjälp av de Euklideiska hjälpmedlen: linjalen och cirkelinstrumentet.

Det är det stränga fasthållandet vid denna princip, som gör det nästan omöjligt att rubba det allra minsta på ordningsföljden mellan satserna. För nybörjaren verkar omväxlingen mellan teorem och problem ganska uppfriskande och gör, att eleven inte så fort tröttnar utan kan hålla intresset för geometrin uppe. Men för gymnasiallläraren, som repeterar elementargeometrin i första ringen, ter sig saken något annorlunda. Han har ej att införa lärjungarna i geometrins studium, utan hans uppgift är att

ge dem en systematisk överblick över innehållet i de lästa satserna från synpunkten att utgöra det material, varpå han har att bygga vidare — helst efter samma principer. Det är tydligt, att man vid en sådan överblick kan ha nära nog obegränsad frihet att ordna och sammanfatta satserna. Men denna ordning blir då alltid gjord ur rent yttre och tillfälliga formella synpunkter, medan den ursprungliga ordningen är betingad av sakens egen natur.

Så t. ex. är det bekvämt att börja med satserna om sidovinklar och vertikalvinklar, vilka hos Euklides förutsätta konstruktionen av en normal och alltså ej kunna flyttas från sin naturliga plats i systemet. Satserna om sidor och vinklar i en och samma triangel bilda en grupp för sig, likaså de fyra kongruensfallen o. s. v. Men den omständigheten, att dessa sammanfattningar ej komma i samma ordning i det ursprungliga systemet, är ej någon grund för att minska på den logiska strängheten i detta senare. Detta vore att använda en alltför ytlig synpunkt i den grundläggande geometriundervisningen.

En metod att rätt avsevärt förenkla själva bevisen är att använda figurers förflyttning i högre grad, än vad Euklides gör. På detta sätt har Lindman lyckats avskaffa »åsnebryggan» (I: 5)[1] och den svåra I: 7. I grund och botten använder Euklides denna metod endast i I: 4, 8 och III: 24, och det ser nästan ut, som om han avsiktligt undvek densamma. Söker man efter orsaken till detta egendomliga förhållande, skall man finna, att det även här är fråga om en strängare systematisk ordning. Euklides har nämligen inte det axiomet, att en figur kan flyttas hur som helst i planet utan att sidor och vinklar ändra storlek. Ett så omfattande axiom är heller icke behövligt. Genom denna sin metod har Euklides visat, att det kan räcka med I: 4, som man då bör betrakta som ett axiom, dock helst i den av Hilbert givna formuleringen.

[1] Förf. använder här den vanliga, fastän oriktiga, beteckningen för I:5. Namnet hör egentligen till I: 20, vilken, som bekant, en åsna bevisar varje gång hon går till sitt foder. (*Anm. av Red.*)

Såvitt jag kan se, finns det ingen möjlighet att rubba på det grundläggande Euklideiska systemet det ringaste grand utan att samtidigt pruta av på strängheten.

Men går man till olika böcker, så kan en omplacering göras. Andra boken har kommit i misskredit genom ett påhitt, som kallades »bevis på linjen», vilket dock var en god gymnastik för tanken. Men bedrives denna bok på ett mer förnuftigt sätt med figurer och i formell anslutning till algebran, så visar den sig äga ett stort värde. Den bör placeras efter tredje boken, vars sista satser böra överföras till slutet på andra boken.

Euklides skiljer skarpt mellan läran om rätliniga figurer och läran om cirklar. En mer systematisk synpunkt vore att i fråga om cirklar göra en lika skarp åtskillnad som i första boken mellan de satser, som ej förutsätta det 12:e axiomet, och de övriga. De förra kunde då lämpligen sammanföras med motsvarande satser i första boken och alltså tagas före I: 27. De senare kunde tagas tillsammans med fjärde boken, sedan några satser urskilts därur och vidfogats andra boken, som sättes efter den fjärde.

Men har Euklides sålunda hävdat sin ställning i fråga om de fyra första böckerna, så är detta långtifrån fallet med de två följande. Visserligen ha femte och sjätte böckerna av Strömers edition av Euklides hållit sig längre än de fyra första böckerna, men på de sista 30 à 40 åren torde Euklides' femte och sjätte böcker ej ha använts alls. Att de dock ej kunnat ersättas på ett tillfredsställande sätt, därom vittna de otaliga läroböcker i proportionslära och likformighetslära, som under det sista halvseklet sett dagen.

Utvecklingen har gått en helt annan väg, i det att man har övergivit den strängt syntetiska metoden och valt den analytiska, där man ej sysslar med storheterna själva utan med deras mätetal, då de tänkas vara uppmätta i vissa storheter som enheter. Härigenom har den betydande förenklingen vunnits, att proportionsläran har så gått som alldeles försvunnit.

Om vi jämföra Euklides' framställning i dessa båda böcker med den i de fyra första böckerna, märks det en betydande skillnad, i det de förra äro utarbetade efter en helt annan och mer invecklad metod än motsvarande satser i t. ex. andra boken. När man satt sig in i den ursprungliga Euklideiska tankegången, sådan den återfinnes i de fyra första böckerna, och sedan kommer till de två följande, får man ovillkorligen det intrycket, att Euklides här slagit in på en helt annan bog.

Men den omständigheten att han inte gjort någon användning av de sista satserna i tredje boken, vilka han nog utarbetat i någon bestämd avsikt, låta en ana, att hans arbete här har blivit avbrutet, och att det fortsatts av en av hans lärjungar, som satte in sina egna ideér vid utarbetandet av femte boken. Hela metoden att uppmäta en storhet i en annan, när mätningen inte går jämnt ut är alldeles främmande för Euklides' tankegång, sådan den framträder i de fyra första böckerna, där han ständigt fordrar den minutiösaste exakthet och åskådlighet utan användning av några räknemetoder.

Om denna hypotes är riktig, vore det av ett visst intresse att få veta, huru Euklides själv tänkt sig fortsättningen av sitt arbete. Detta är naturligtvis omöjligt, men det går dock att så till vida rekonstruera hans intentioner, som man kan omedelbart bygga vidare på de nämnda satserna och utan proportionslära, blott med användning av metoderna i andra boken härleda alla satser i likformighetsläran, d. v. s. i sjätte boken.

Likformighetsläran grundar sig på transversalsatsen, och denna kan erhållas såsom en omedelbar följd av Euklides III: 36, såsom jag redan tidigare uppvisat (»Euklides' sjätte bok utan proportionslära» i Nyt Tidsskrift for Mathematik, Ser. B, s. 64, 1902).

I efterföljande försök till en sådan rekonstruktion använder jag för lättare förståelses skull både en terminologi och beteckningar, som äro lånade från det gängse framställningssättet, väl vetande, att dessa såväl som formu-

leringarna m. m. skulle ha gestaltat sig olika, om den andra framställningen ej hade funnits. För terminologin fordras naturligtvis särskilda definitioner.

Definition 1. Med *a.b* menas ytan av en rektangel, där två närliggande sidor betecknas med *a* och *b*. Tydligen är $ab = ba$.

Följdsats. Om $ab = xb$, så är $x = a$.

Sats 1. Om en rät linje drages parallell med en sida i en triangel, så delas de båda övriga sidorna i delar *a*, *b* och *c*, *d* sådana, att $ad = bc$.

Bevis. Drag (fig. 1) E_1D_1 så, att $AE_1 = AE$ och $AD_1 = AD$. Då kan en cirkel omskrivas omkring fyrhörningen BCD_1E_1, och härav följer (III: 36), att $(a + b)c = (c + d)a$, varav satsen följer enligt II: 1.

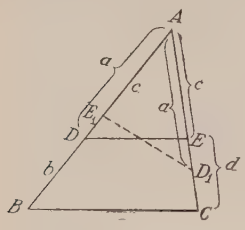


Fig. 1.

Definition 2. Om fyra linjer *a*, *b*, *c*, *d* äro sådana, att $ad = bc$, så sägas de vara proportionella.

Följdsats. En rät linje, som drages parallell med en sida i en triangel, delar de båda övriga sidorna i proportionella delar (segment).

Sats 2. Om två par linjer (*a*, *b*) och (c, *d*) äro proportionella mot ett och samma par linjer (*e*, *f*), så äro de sinsemellan proportionella, d. v. s. om $af = be$ och $cf = de$, så är $ad = bc$.

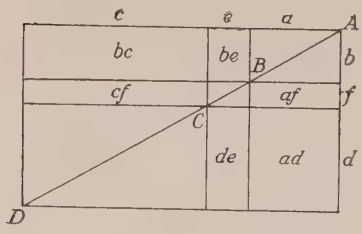


Fig. 2.

Bevis. Emedan $af = be$, så är (fig. 2) *ABC* en rät linje (enligt omvändningen till I: 43).

Emedan $cf = de$, så är *BCD* en rät linje, ∵ *ABCD* är en rät linje ∵ $ad = bc$ (I: 43).

Anm. 1. Ur sats 1 och definition 1 följdsats följa alla likformighetsfallen. Ur det likformighetsfall, som svarar mot det andra kongruensfallet, följer sats 2 omedelbart, men då måste linjerna antagas valda så, att de kunna

bilda två trianglar lagna tre och tre. Av denna inskränkning lider ej ovan givna bevis.

Anm. 2. Alla satser i likformighetsläran, som ej handla om ytors förhållanden utan endast om förhållanden mellan linjer, bevisas likaledes på ungefär samma sätt som enligt den vanliga metoden. Bevisen bli identiskt lika, om man inför följande definition, som dock kan undvaras:

Definition 3. Likheten $ad = bc$ kan tecknas symboliskt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, där symbolen $\frac{a}{b}$ kallas för »förhållandet mellan a och b».

Anm 3. Sats 2 innebär, att om $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ och $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, så är $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Anm. 4. Om symbolen $\frac{a}{b}$ kunna även de andra aritmetiska axiomen lätt bevisas gälla, alltså kan den betraktas som en storhet.

Såsom exempel på metodens användning anföres beviset för det likformighetsfall, som svarar mot det första kongruensfallet. Antag (fig. 3) $\angle A_1 = \angle A$ $c_1 b = cb_1$; påstående: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. Konstr. Gör $AD = c_1$ och drag $DE \parallel BC$. Kalla AE för x.

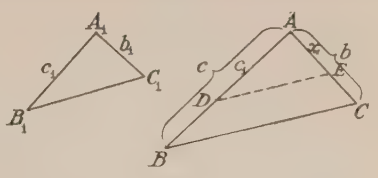


Fig. 3.

Bevis. Enl. sats 1 är $c_1 b = cx$, men $c_1 b = cb_1$ (ant.), $\because$ $cx = cb_1$, $\because$ $x = b_1$ (def. 1 f), $\because \triangle ADE \cong \triangle A_1B_1C_1$. Men $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (bevisas först såsom en följdsats ur sats 1 på vanligt sätt), $\because \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

När det gäller ytors förhållanden måste man formulera om satserna så, att de reduceras på proportionella linjer. Satsen om likformiga figurers ytor kan formuleras sålunda:

Sats 3. Om två kvadrater göras lika stora med var sin av två likformiga månghörningar, så äro kvadraternas

sidor proportionella mot ett par homologa sidor i månghörningarna.

Bevis. Månghörningarna förvandlas på vanligt sätt till trianglar efter samma metod, varvid de successive nya månghörningarna ständigt bliva likformiga två och två med ett par homologa sidor oförändrade, och trianglarna kunna ersättas med ett par likformiga rektanglar, där det ena sidoparet utgöres av de nämnda två homologa sidorna i de ursprungliga månghörningarna. Konstrueras sedan medelproportionalen till vardera rektangelns sidor, så finner man genom likformighet, att de sålunda konstruerade kvadratsidorna bli proportionella mot de homologa sidorna.

Satserna och bevisen i detta system bliva så till vida formellt enklare, som man hela tiden använder symboler som likna produkter i stället för sådana som likna kvoter, såsom fallet är i den vanliga proportionsläran. Övergången till sifferräkning är densamma i båda systemen och bevisen behöva ej ändras, när man t. ex. låter ab beteckna produkten av mätetalen för en rektangels yta i stället för att låta ab (enligt definition 1) beteckna ytans storlek i allmänhet.

Jag har på försök använt metoden i *R* I och försöket har slagit väl ut. Ingen svårighet förmärktes senare vid övergången till den vanliga framställningen.

Emot metoden skulle kunna anmärkas, att beviset för transversalsatsen är väl mycket konstlat, då det stöder sig på hela andra boken och en stor del av tredje boken.

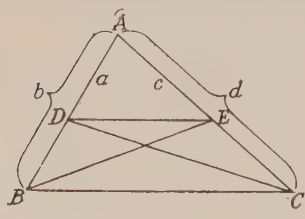


Fig. 4.

Med tillhjälp av sats 2 kan transversalsatsen bevisas analogt med motsvarande sats hos Euklides sålunda:

Är (fig. 4) h = höjden från E mot AB och k = höjden från D mot AC, så fås

$$2\triangle ADE = ah = ck.$$

$2\triangle ABE = bh$, $2\triangle ACD = dk$, $\because bh = dk$, varav fås enligt sats 2 $ad = bc$.

Anmärkning av Redaktionen.

I föreståend uppsats har den högt ärade författaren tagit till ordet för att försvara den euklideiska lärogången mot de moderna strävandena att förenkla och systematisera den geometriska lärogången; och i vissa delar torde man ej kunna underlåta att giva honom rätt, såsom då han t. ex. opponerar mot de falska bevisen för det s. k. 12:e axiomet o. d.

Men å andra sidan torde man nödgas medgiva, att han betänkligt skjutit över målet, då han vill binda läraren och läroboken vid att *i allt* följa Euklides. Visserligen har han ej uttryckligen i uppsatsen nämnt just de satser (Eukl. I: 2 och 3 samt 13 och 14), som av *alla* moderna läroböcker uteslutits eller omändrats, men av det hela framgår att han även avser dessa, vilket han även i ett privat brev till Red. bekräftat.

Vända vi oss då först till dessa satser, vid vilka olikheten mellan Euklides' bruk av passaren och den moderna metoden för detsamma bäst framgår, så är det fullkomligt obegripligt, varför han föredrager Euklides' postulat 3 »att taga en given punkt till medelpunkt för en cirkel som går genom en annan given punkt» framför det moderna »att med en given punkt till medelpunkt draga en cirkel med given radie». Kan väl någon på allvar påstå, att det förra postulatet är på något sätt enklare än det senare i en framställning, där just metriska förhållanden mellan linjer (och även vinklar) intaga ett framstående rum? Om det vore fråga om något slags »Geometrie der Lage»,[1] där begreppet likastorhet är uteslutet, så kunde ett sådant påstående göra skäl för sig, men aldrig i en Euklideisk framställning. Förf. påstår visserligen med rätta, att de euklideiska »problemen» blott äro existensbevis, och således Eukl. I: 2 och 3 blott äro bevis för att en linje kan flyttas och att av en linje kan avskäras ett stycke lika med en

[1] Se t. ex. Reye, Geometrie der Lage, Hannover 1877.

given; men felet hos dem är just att de *endast* äro existensbevis, och ej tillika giva en antydan om, huru saken i verkligheten skall utföras: den ingenjör, som t. ex. på ritbrädet skulle flytta en linje enl. Eukl. I: 2, skulle närmast förklaras vansinnig. Likaså äro Eukl. 9—12, såsom förf. riktigt anmärker, endast bevis för att en mittpunkt, en bissektris och en normal existera i »den euklideiska rymden», alldeles oberoende av huruvida dessa konstruktioner äro lämpliga på ritbrädet eller ej. Men man kan då med skäl fråga, huruvida sådana spetsfundigheter tillfullo fattas av barn i klasserna 4 och 5, och om man icke här ger dem stenar i stället för bröd: de äro mycket intresserade av hur det går till att dela en linje mitt itu, men att *bevisa* att linjen har en mittpunkt är för dem meningslöst, då de aldrig tvivlat på den saken: man måste då först *lära* dem att tvivla därpå, men detta är en sak som tillhör ett mycket senare utvecklingsstadium, och för resten endast tillkommer matematikern ex professo och ingalunda tillhör allmänbildningen. Det kan även påpekas, att den store Alexandrinarens verk ingalunda är skrivet för barn, utan för de tvivelsjuka grekerna från förfallets tid.

Vad Eukl. I: 13 och 14 beträffar, så hava de att tacka för sin tillvaro endast Euklides' från alla synpunkter dåliga definition på vinkel: »en platt vinkel är den lutning som två linjer hava till varandra, vilka äro i samma plan och råka ihop, men ej ligga i rät linje».[1] Hur mätes denna »lutning»? Är ej »lutning» blott ett annat ord för vinkel? Varför få de ej ligga i rät linje? o. s. v. Allt detta kan undvikas genom att ändra definitionen till ». . . den vridning, som den ena linjen behöver undergå för att sammanfalla med den andra», varefter behöves en lätt utredning om vinkelns mångtydighet. Härigenom undgås det spetsfundiga beviset I: 13, och dessutom blir vinkelbegreppet mycket klarare utrett.

[1] I parentes må erinras om den ännu omöjligare definitionen på en solid vinkel (Eukl. XI, def. 10) »*den* lutning som flera än två räta linjer, vilka icke äro i samma plan, hava till varandra».

Vi hava uppehållit oss så länge vid dessa enkla saker, för att vederlägga förf:s uttalande, att varje rubbning av Euklides' system är nästan omöjligt.[1]

Komma vi så till läran om figurers flyttning. Förf. påstår, att Euklides blott använder sig därav i tre satser (I: 4, 8 och III: 24) och påstår strax efteråt, att »Euklides därigenom visat att det kan räcka med I: 4». Hur detta går ihop torde vara skäligen obegripligt. Emellertid synes han vilja räkna denna inskränkta användning av flyttning Euklides till förtjänst, så att en framställning som använde det i större utsträckning därigenom skulle bliva svagare.

Men härvid är att anmärka, att fastän flyttningen explicite blott användes i dessa tre satser, så användes den indirekt i alla de satser, som använda dessa, och det är nästan alla. Hur skulle han t. ex. kunna bevisa I: 9—12, 26 m. fl. utan att flytta trianglarna, fastän denna flyttning här sker indirekt genom åberopande av de förut nämnda satserna. Det är under sådana förhållanden ganska obegripligt, vari fördelen ligger, men väl skulle man kunna påvisa olägenheter därav. Så t. ex. måste han bevisa I: 26 (första delen: två vinklar och mellanliggande sida) genom ett fjärran liggande indirekt bevis i stället för att omedelbart bevisa det ord för ord såsom I: 4, blott utbytande orden vinkel mot sida och tvärtom, varvid det även finge sin naturliga plats i systemet. En snarlik tendens att krångla till bevisen finnes även i I: 5, där han onödigtvis drager ut sidorna för att få de omvänt kongruenta trianglarna att ej helt, utan endast delvis, täcka varandra. Härigenom kommer även satsen att ej tagas ur sina verkliga grunder, att triangeln är omvänt kongruent med sig själv eller, enligt ett annat bevis, att den kan sammanvikas, utan den tages fram ur uppkonstruerade grunder, som föga hava med satsens natur att skaffa. Detta är överhuvudtaget vanligt hos Euklides, och utgör i vår tanke ett stort fel hos honom. På frågan: »Hur kommer det sig till, att vinklarna vid basen i en lik-

[1] Trots denna »omöjlighet» vill förf. dock ändra satsernas ordning, då det gäller deras fördelning på de olika böckerna.

bent triangel äro lika?» kan nämligen ingen människa svara, att det beror därpå, att om sidorna utdragas och sammanbindning sker korsvis, så uppkomma två par omvänt kongruenta trianglar, utan man måste svara, antingen att den är en symmetrisk figur (= kan sammanvikas utefter en symmetrilinje) eller att den kan läggas omvänd på sig själv.

I fråga om satsernas gruppering hos Euklides inser även förf., att den vid en kommande repetition måste göras om, men han tillägger: »Men denna ordning blir då alltid gjord ur rent yttre och tillfälliga formella synpunkter, medan den ursprungliga ordningen är betingad av sakens egen natur.» Jag skulle vilja påstå raka motsatsen: Euklides' anordning av satserna är gjord på rent formella grunder, nämligen huru de enklast *bevisas* ur varandra, under det att alldeles närbesläktade satser komma långt från varandra. Så t. ex. de tre kongruensfallen i I: 4, I: 8 och I: 26; en cirkels läge i förhållande till en rät linje eller en annan cirkel i III: 2, 5—6, 10—13, 16—19. Någon översikt förekommer ej alls. Rätliniga figurers omformning delas på böckerna I—III o. s. v. På det hela får man det intrycket, att satserna äro till för bevisens skull, och ej tvärtom. Om man vill hava någon behållning av Euklides från saklig, geometrisk, synpunkt och ej blott betrakta den såsom en exempelsamling i logik, så måste en omordning göras från saklig, ej blott formell, synpunkt.

Slutligen komma vi till den mycket omdebatterade frågan om 12:e axiomet.

Alla torde vara ense med förf., att det är i hög grad olämpligt att giva ett mer eller mindre oriktigt bevis för denna sats, och nära nog lika erkänt är det, att Euklides' formulering av axiomet, i synnerhet där den står, är föga lämplig, då den omöjligt kan fattas av den som ej känner I: 17, och i övrigt ej just har karaktären av ett axiom. Vad det gäller är att giva det en formulering som är tillräckligt enkel, och att noggrant förklara dess innebörd. Det är detta som jag har försökt (Meyers geometri, sidorna

35 och 40). Om man t. ex. formulerar det så: »Genom en given punkt kan endast en rät linje dragas parallell med en annan» eller »de räta linjer, som äro parallella med en och samma, äro sinsemellan parallella», så torde ingen elev hava någon anmärkning att göra mot detta, mer än mot de övriga geometriska axiomen, t. ex. kongruensaxiomet eller axiomet om att två räta linjer blott hava en punkt gemensam. Det är i själva verket ej heller härom frågan rör sig, då detta axiom i varje fall är oundgängligt i den *euklideiska* geometrin, utan om den plats det bör intaga. Härvid har Euklides gjort sig skyldig till en ganska märkvärdig inkonsekvens, då han placerat det i början av första boken, men tydligen bemödar sig att undvika det i satserna 1—26. Härom säger Hr Petrini:

1:o »Ur rent systematisk synpunkt är det en fördel att bevisa satserna [torde böra vara: så många satser som möjligt] med minsta möjliga antaganden.»

2:o »Man förlorar i allmängiltighet hos satserna I: 16—26 [Varför ej 1—26?], om man tar med det 12:e axiomet för tidigt, ty alla satser t. o. m. I: 26 gälla för figurer uppritade ej blott på en plan yta, utan även på en del av en klotyta. Sålunda får man såväl första och andra kongruensfallen som tredje och fjärde alldeles till skänks för sfäriska trianglar.»

Vad den första synpunkten beträffar, så är den ju odisputabel, åtminstone om det gällde hela systemet och ej blott ett fåtal satser, och det är ju denna som givit upphov till Hilberts så högt skattade arbete, men en annan fråga är, om »den rent systematiska synpunkten» är av någon som helst betydelse för eleverna i fjärde och femte klasserna; och i varje fall torde den ej uppväga fördelen av att få satserna i rimlig ordning och med *naturliga* bevis. Jag är t. o. m. av den åsikten att för detta ändamål rentav ett eller annat axiom till väl kunde införas (t. ex. att två cirklar högst kunna skära varandra i två punkter), blott det är tillräckligt enkelt och åskådligt, även om det skulle

kunna bevisas. De rent vetenskapliga synpunkterna[1] böra nämligen på detta stadium underordnas de pedagogiska.

Den andra synpunkten är än mer tvivelaktig. Det är nämligen alls ej sant, att de första satserna gälla oförändrade på sfären: Om t. ex. två sidor och mellanliggande vinkel i en sfärisk triangel äro lika med motsvarande i en annan, så äro trianglarna ej med säkerhet kongruenta, utan de kunna även vara symmetriska, och för att bevisa dels detta, dels även att symmetriska figurer överensstämma i motstående sidor och vinklar fordras ganska vidlyftiga utredningar, och symmetriskt kongruenta trianglar användas av Euklides i de flesta av satserna I: 5—26. Men även om det vore riktigt, vari ligger fördelen i att taga det på detta stadium? Är det ej mycket lämpligare att föra det till stereometrin, dit det verkligen hör? Vilka fördelar väntar sig förf. av att smågossarna känna en eller annan sats ur den sfäriska geometrin, då de ännu ej känna något för övrigt om rymdgeometrin, utan ännu uteslutande hava behandlat planet, ja egentligen ej ens veta, vad en sfärisk triangel är, då Euklides' definitioner på såväl rät linje som vinkel här lämna dem i sticket? Även i detta avseende torde således fördelarna av Euklides' lärogång vara skäligen illusoriska.

Slutsatsen av det hela är därför, att den lärare, som slaviskt följer Euklides, väl har givit sina elever lektioner i *logik*, men vill han därjämte undervisa dem i *geometri*, så bör han lämpligen följa en modernare lärogång.

[1] Det torde knappast ens behöva nämnas, att jag härmed ej avser de givna bevisens stringens, utan endast sådana saker som att allt som kan bevisas även skall bevisas, även om det aldrig så enkelt kan tagas ur åskådningen o. s. v.

M—r.

Om fasta ämnens reaktionsförmåga.[1]

Av J. ARVID HEDVALL.

Föreliggande uppsats innehåller tvenne delar. I den första har anförts några för utvecklingen av detta område karakteristiska rön av andra forskare. Den andra åter är en överblick över de bidrag, som författaren själv sökt lämna i berörda avseende under perioden 1911—24.

I.

Så länge man icke antog något slags rörlighet hos materien i fast form, var det fullt naturligt att frånkänna det fasta aggregationstillståndet varje kemisk reaktionsförmåga. Erfarenheten hade länge intet att invända emot ett sådant betraktelsesätt. — Den genom ett stort antal undersökningar verifierade kinetiska uppfattningen av materiens byggnad och tillstånd tvingade emellertid senare till tron på en viss rörlighet även hos en kristalls byggnadsdelar. Det började då också bli klart, att kemiska omsättningar även mellan fasta ämnen icke borde vara någon orimlighet. Exemplen härpå äro också numera ganska talrika.

I början studerades huvudsakligen förändringar i beröringsskikten mellan olika metaller eller metalloider och först senare, i samband med studiet av fasta lösningar och silikattekniska problem utsträcktes dessa forskningar även till andra system. — Den förste, som iakttog någon förändring av kontaktytor mellan metaller var väl *Faraday*. Han konstaterade ett slags, genom diffusion bildat legeringsskikt, där stavar av järn och platina berört varandra. Av de efter honom talrika liknande iakttagelserna må här endast nämnas dem av *Roberts Austen*[2], vilka företogos i avsikt att erhålla ett begrepp om hastigheten vid ett dylikt

[1] Förut införd i Teknisk tidskrift.
[2] Proc. Roy. Soc. London 1896.

diffusionsförlopp. Han arbetade med bly och guld och kunde bland annat fastställa, att guldet vid en temperatur av 250° hade diffunderat upp i blyet till en höjd av 0,7 cm efter 30 dagar. Samma höjd av det guldhaltiga skiktet kunde vid 18° erhållas först efter 4 år.[1] — Under 1880- och 90-talen publicerade *W. Spring*[2] ett antal arbeten, berörande likartade fenomen. Han utgick ifrån att mäta de tryck, som erfordrades för att omvandla en hel del olika pulver till kompakta stycken. Pressen tillät tryck upp till 10 000 atmosfärer. Han fann, att det erforderliga trycket för enhetliga pulver i allmänhet låg vid c:a 5 000 atmosfärer. För blandningar fann han dess värde i hög grad beroende på, om de i pulvret blandade ämnena på något sätt kunde kemiskt inverka på varandra. Om en kemisk förening under volymminskning kunde uppkomma, var värdet på trycket abnormt lågt. *Spring* riktade genom sin mångfald hithörande arbeten detta forskningsområde med många rön. I flera avseenden hade han emellertid, som en senare kritik av *Masing* visat, överskattat och delvis missuppfattat betydelsen av det verkande trycket som reaktionsfaktor. *Masing*[3] kunde nämligen gentemot *Springs* åsikt visa, att enbart tryck vid vanlig temperatur icke inom vanliga tidsmått för laboratorieförsök leder till bildande av legeringar av något slag. Så kunde t. ex. i blandningar av bly och tallium, som vid rumstemperatur pressades vid ett tryck av 5 000 atmosfärer, först efter ungefär ett år spår av blandkristaller påvisas, trots att de bildas vid 120° i väsentlig mängd redan efter ett par timmar. Och i pressstycken av magnesium och antimon uppkommer föreningen Mg_3Sb_2 redan 300° under systemets lägsta, eutek-

[1] Nyare mätningar ha bl. a. utförts av *Frænkel* o. *Heuten:* Zeitschr. f. anorg. Chemie *116*, sid. 1; *Sirovich-Centoceli:* Gazz. chim. ital. *51*,2, sid. 245. Se. f. ö. *Braune:* Zeitschr. f. physik. Chemie *110* (Nernstband), sid. 147.

Se även *Desch:* Raport on diffusion in solids, Brit. Assoc. f. adv. of. sci. 1912.

[2] Zeitschr. f. physik, Chemie *15* (1894), sid. 65.

[3] Zeitschr. f. anorg. Chemie *62*, sid. 265. Jfr även *G. Tammann:* Lehrbuch der Metallographie, 3:e uppl. (1923), sid. 233.

tiska temperatur — således vid c:a 280° — men även under starkaste tryck vid rumstemperatur kunde under mikroskopet inga spår av föreningen upptäckas.

Flera praktiska tillämpningar av denna metallatomernas rörlighet även i fast tillstånd äro sedan länge i bruk. Här må blott nämnas den ofta förekommande upphettningen av vissa legeringar under smältpunkten för åstadkommande av vissa omlagringar i godset och framställningen av galvaniserat järn genom upphettning av järn- och zinkpulver vid 2—300°.

Den *Masing*ska kritiken av *Spring*s arbeten möjliggjordes genom den apparatur och de undersökningsmetoder, som först detaljerat utarbetats av *Tammann* och hans skola. Metallografiens hastiga uppblomstring och utveckling till en av metallindustriens viktigaste vetenskapliga hjälpmetoder står i intimt samband med dessa under lång tid systematiskt utförda arbeten. Utforskandet av metallernas ömsesidiga kemiska förhållande med tillhjälp av den så kallade termiska analysen ledde naturligtvis till en vidgad kännedom även om kemiska reaktioner i fast form inom sådana system. Även om många av dessa reaktioner förlöpa så långsamt eller under så ringa värmeutveckling, att de ej kunna iakttagas på upphettnings- eller avkylningskurvor, kan man på mikroskopisk eller mikrofotografisk väg vanligen utan svårighet konstatera, om ett nytt strukturelement uppkommit. — Vi kunna anföra följande klasser av hithörande förändringar i metalliska system:

1) fasta lösningar kunna ändra sin sammansättning. Så erhållas t. ex. i Cu-Zn-systemet vid avkylning blandkristaller av avtagande kopparkoncentration (vid 910°, 63 %; vid 400°, 55% Cu),

2) en förändring av fasta lösningars egenskaper eller t. o. m. existensbetingelser kan äga rum, om vid temperaturförändring en eller flera av komponenterna undergår en fasomvandling (ex.: Fe-C-systemets beroende av järnets omvandlingspunkter),

3) en kemisk förening kan bildas eller sönderfalla, som t. ex. nyss nämnts i Mg-Sb-systemet.

Ett annat fenomen, som tydligt visar hän på en avsevärd rörlighet hos atomerna i metallernas kristallgitter, är den s. k. *rekristallisationen*,[1] d. v. s. uppkomsten av nya kristalliter av viss orientering i en metall eller i ett metallpulver ovanför en viss, ofta förvånansvärt låg temperatur. Fenomenet har t. ex. för silver iakttagits vid 60°, för tenn vid 45°. Liknande observationer äro gjorda även för andra ämnen än metaller, t. ex. ett antal organiska föreningar och oorganiska salter.

Ett område, där hithörande forskningar i större utsträckning sträckt sig utanför de metalliska systemen, är de fasta lösningarnas, redan omnämnt i samband med vissa förändringar hos stelnade metaller. Sedan *van't Hoffs* klassiska avhandling[2] ha ett otal exempel[3] på upplösning av ett fast ämne i ett annat fast beskrivits och blivit av största vikt även rent tekniskt. Här må utanför metallindustriens intressen blott nämnas betydelsen för silikat- och cementindustrien.

I detta samband kunna heller icke de ytterst intressanta arbeten förbigås, som *Tammann* och hans medhjälpare utfört angående det skydd, gentemot kemiska reagenser, som ett atomslag under vissa omständigheter kan utöva på ett annat i isomorfa blandkristaller.[4] Exempelvis har därvid visats, att de guldmängder, som i en guld-kopparlegering behövas för att verka skyddande på kopparn, äro i atomprocent uttryckta: 12,5, 25 eller 50 eller omräknade i bråkdelar av samtliga närvarande atomer: $^1/_8$, $^2/_8$ eller $^4/_8$ alltefter olika, på kopparn eljest kemiskt verksamma reagens. Geometriskt låta sig dessa talvärden lätt förklaras med kännedom om atomplacering och atomavstånd i metallernas

[1] Jfr *Tammanns* Metallographie, sid. 98; *Masing:* Die Naturwissenschaften 1923, sid. 413.
[2] Zeitschr. f. physik. Chemie 1890, sid. 322.
[3] Jfr *Bruni:* Über feste Lösungen, Samml. chem. techn. Vorträge, bd VI.
[4] Jfr Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *107* (1919).

gitter samt atom- eller molekylarvolym hos det verksamma reagenset. Siffrorna gälla naturligtvis endast för temperaturer, där metallatomernas rörelse icke nått en sådan livlighet att språng från ett läge till ett annat inom gittret kunna inträffa. Exempelvis angreps en Cu-Au-legering med 22 atomprocent Au vid rumstemperatur ej alls av svaga oxidationsmedel, under det att vid 123° legeringar med 55 atomprocent Au och vid 156° med ända till 89 atomprocent Au tämligen hastigt visade oxidation av kopparn.

Betingelserna för uppkomsten av verkliga kemiska reaktioner i andra pulverformiga blandningar än metalliska ha i det längsta icke varit föremål för undersökning. De redan omnämnda *Spring*ska arbetena berörde emellertid delvis även detta område. Så framställde han[1] t. ex. en del metallsulfider genom att vid 6 500 atmosfärer sammanpressa svavel med ifrågavarande metall i pulverform. Dessa reaktioner synas emellertid icke ha förlöpt med någon större hastighet. Så hade t. ex. en pulverblandning av koppar och svavel efter några timmars pressning endast givit c:a 8,5 %:s reaktionsutbyte (CuS). Denna blandning fick kvarstanna i pressen under fyra år, efter vilken tid kopparsulfidhalten var c:a 12,5 %. De mest bekanta av de hithörande *Spring*ska experimenten äro omsättningarna i vid 6 000 atmosfärer pressade pulver av bariumsulfat och natriumkarbonat och bariumkarbonat och natriumsulfat. Emellertid fann han vid dessa försök ett sämre reaktionsutbyte vid 120° än vid rumstemperatur, vilket gör sannolikt, att dessa salter under den upprepade ompulveriseringen och sammanrivningen vid vanlig temperatur tagit upp vatten och att alltså uppkomsten av ett flytande reaktionsskikt varit av betydelse för reaktionernas förlopp.

På samma sätt som den tekniskt tillämpade metallforskningen varit en stark drivfjäder till ett energiskt bearbetande av metallernas ömsesidiga kemiska förhållande, så kan man också säga, att silikatindustrien framkallat eller åtminstone i hög grad befruktat studiet av de kemiska

[1] Bull. soc. chim. *46* (1886), sid. 299.

omsättningarna även i fasta blandningar av hithörande ämnen. Så undersökte *Cobb*[1] 1910 möjligheterna för reaktioner mellan kalciumkarbonat och kiselsyra. Han fann, att kalciumsilikat uppkom:

efter 28 timmar vid 800° till 2,5 %,
» 1 timme » 1 100° » 5,8 % och
» 1 » » 1 200° » 14,4 %.

Cobb drog sig emellertid för att anse dessa och liknande omsättningar för verkliga reaktioner mellan fasta ämnen. Han talar om ett slags »quasi vaporous film» som skulle spela rollen av reaktionsskikt.

Den föregående historiska överblicken har visat, att det område av kemien, som här är föremål för behandling, hittills endast mycket ofullständigt bearbetats. Det har emellertid synts mig lämpligt att i föreliggande uppsats medtaga denna översikt, dels på grund av det stora intresse varav dessa pioniärarbeten äro förtjänta, dels ock för att i viss mån sätta läsaren in i författarens läge vid utförandet av de blygsamma bidrag till områdets vidare utveckling, vilkas översiktliga sammanfattande varit huvudändamålet med denna uppsats.

II.

De resultat, till vilka författaren kommit, kunna i korthet sammanfattas i följande punkter:

A) med hjälp av upphettnings- och avkylningskurvor kunna reaktioner även i pulverformiga, icke metalliska blandningar studeras,

B) kemiska föreningars termiska sönderfall ha i ett flertal fall så noga kunnat undersökas, att en bestämning av dissociationstemperaturer varit möjlig. Likaledes ha undersökts:

[1] Journ. Soc. chem. ind. 1910, sid. 69, 250, 335, 399, 608, 799.

C) inflytandet av kornstorlek, kornform, modifikation och skyddsskikt på reaktionsförloppet,

D) framställningssättets inverkan på reaktionsförmågan hos vissa ämnen,

E) ett flertal metalloxider i avseende på deras förmåga att med andra oxider bilda fasta lösningar eller kemiska föreningar,

F) ett antal med förvånande stor hastighet förlöpande reaktioner i blandningar av superoxider och metalloxider,

G) en nyfunnen typ av reaktioner:

$$MO + MeAc = MeO + MAc,$$

där MO är en mera basisk oxid än MeO och, där MAc och MeAc äro samma metallers salter med en syresyra.

A.

Om en fast kropp upphettas och sambandet mellan tid och temperatur grafiskt framställes, så erhålles för det fall att inga förändringar inträffa under upphettningen en kurva,

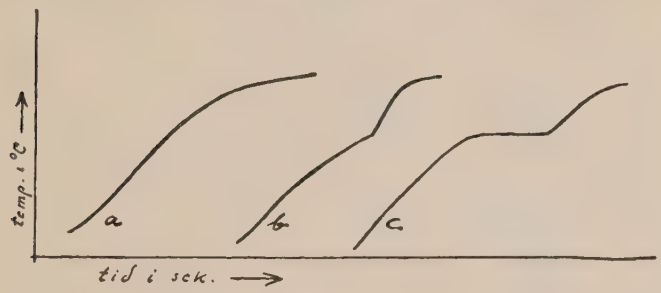


Fig. 1.

fig. 1 a. Inträffa åter förändringar, som innebära en värmeutveckling eller värmeabsorption, erhållas upphettningskurvor som fig. 1 b eller 1 c respektive. Dessa förhållanden har man länge betjänat sig av vid studiet av metallegeringar. Det ansågs emellertid a priori omöjligt, att på liknande sätt studera pulverformiga blandningar av icke me-

tallisk art. Man antog, att värmeledningsförhållandena i dylika pulver skulle lägga hinder i vägen och, att de eventuella reaktionerna förmodligen skulle förlöpa både för långsamt och i för ringa utsträckning för att på detta sätt kunna iakttas. Det visade sig emellertid att så ingalunda var fallet. Några av de viktigaste försiktighetsmåtten vid dylika observationer må i det följande nämnas.[1]

Den för upphettningen avsedda ugnen måste vara sådan, att värmetillförseln till reaktionsblandningen sker jämnt och kontinuerligt utan risk för lokala överhettningar. Termoelementet måste placeras i centrum av reaktionsblandningen. I ett system, där reaktionen förlöper under stark värmeutveckling bör både pulvermängden och upphettningshastigheten vara liten, emedan i annat fall lätt för låga temperaturer erhållas. I system åter, där en liten värmeutveckling åtföljer reaktionen äro dessa båda faktorer av mindre betydelse. Dessa förhållanden framgå av följande tabell. I a) visas, att de observerade begynnelsetemperaturerna för den starkt värmeutvecklande reaktionen:

$$BaO + CuSO_4 = BaSO_4 + CuO + 46\ Cal.$$

Tabell 1.

a	Upphettningshastighet	16° per 10 sek.	6° per 10 sek.	3° per 10 sek.
	Begynnelsetemperatur	354°	360°	370°
b	Upphettningshastighet	20° per 10 sek.	12° per 10 sek.	4° per 10 sek.
	Begynnelsetemperatur	368°	369°	372°

[1] Som man kan vänta fordrar denna metod, applicerad på dylika system, en alldeles speciell teknik. De under ett flertal år gjorda erfarenheterna ha publicerats i del III av »Säureplatzwechsel zwischen festen Phasen III», Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *135*, sid. 69 (tills. m. *J. Heuberger*), till vilken avhandling hänvisas för erhållande av mera ingående kännedom om förfaringssättet.

i hög grad variera med upphettningshastigheten, under det att detta icke i tillnärmelsevis samma grad är fallet med den svagt värmeutvecklande reaktionen i b):

$$BaO + SrSO_4 = BaSO_4 + SrO + 11 \text{ Cal.}$$

Med någon övning söker man sig snart fram till lämpliga kvantiteter av reaktionsblandningen och lämplig upphettningshastighet. I allmänhet torde man kunna säga, att 0,2—0,3 gr substans och 1—3° temperaturstegring på 10 sek. äro lämpliga värden vid användande av Halden-

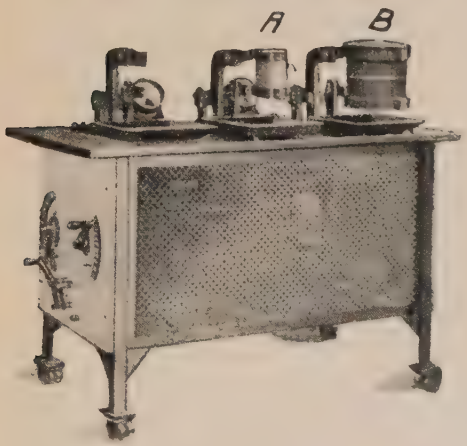


Fig. 2 visar kopplingsbord med 2 inkopplade upphöjda Tammannugnar A och B enl. Gebrüder Ruhstraats katalog (Göttingen).

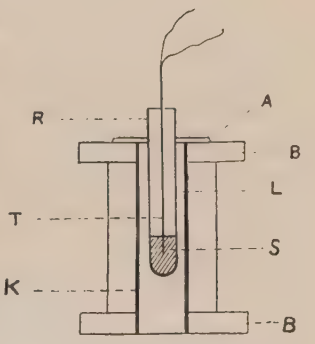


Fig. 3.

wangers rördeglar med c:a 9 mm:s inre diameter. Den ugnstyp, som därvid kommit till användning är en s. k. Tammannugn, fig. 2.

Ugnen med sina vattenkylda kopparbackar B, det strömgenomflutna, värmealstrande kolröret K, den i en asbestplatta A upphängda rördegeln R — skild från kolröret genom luftskiktet L — och reaktionspulvret S med däri nedsatt termoelement T visas av fig. 3 i genomskärning.

Vid mycket små reaktionsvärmen kan man emellertid behöva något öka substansmängden. Man kan i dylika fall

även pressa pastiljer av reaktionspulvret och borra ned termoelementet däri. En annan, ofta användbar metod att öka tydligheten av den emot reaktionsbegynnandet svarande, på upphettningskurvan uppträdande effekten är att koppla in en annan reaktion samtidigt med den, som skall studeras. Så är t. ex. värmeutvecklingen vid:

$$MgO + CoSO_4 = MgSO_4 + CoO + \text{c:a } 1{,}5 \text{ Cal.}$$

alldeles för obetydlig för att kunna iakttas på kurvan. Låter man emellertid upphettningen ske i syrgas, så oxideras den vid reaktionen uppkomna koboltoxidulen omedelbart till Co_3O_4 under ganska stark värmeutveckling enligt:

$$3\ CoO + \frac{1}{2}O_2 = Co_3O + 63 \text{ Cal.}$$

B.

De första försöken att använda denna enkla, under snart ett decennium prövade och förbättrade metod gingo ut på att undersöka förloppet vid en del oorganiska föreningars termiska sönderfall. Detta sker för olika ämnen med en påfallande olika hastighet. Man skulle ibland tro sig berättigad att uppställa den regeln, att sönderdelningen förlöper hastigare ju mera flyktig den bortgående beståndsdelen är och ju svagare de basiska egenskaperna hos den kvarblivande metalloxiden äro utpräglade. Denna regel är dock ingalunda allmängiltig. Visserligen sönderfaller $CaCO_3$ fortare än $BaCO_3$ och $CaSO_4$, men ävenledes fortare än $FeCO_3$. För att kunna bestämma en förenings dissociationstemperatur[1] erfordras att sönderfallet sker hastigt. I annat fall erhålles på upphettningskurvan intet utpräglat horisontellt område och alltså ingen noggrann temperaturbestämning. För t. ex.

$$CaCO_3 = CaO + CO_2 \text{ och}$$

$$Co_3O_4 = 3\ CoO + \frac{1}{2}O_2$$

[1] Med dissociationstemperatur menas den temperatur, där trycket på den bortgående gasen = atmosfärtrycket.

låter sig en sådan bestämning emellertid väl utföras. Man erhåller fullt horisontella intervall på kurvorna, svarande emot temperaturerna 918° och 912° respektive.[1] — Men även i sådana fall, där sönderfallet sker för långsamt för att tillåta en noggrann bestämning av dissociationstemperaturen, kommer man dock med denna metod till en mycket god överblick över sönderfallets förlopp, särskilt, om man låter upphettningen ske i ett slutet rör, vari en kvävgasström inblåses och varur den får medföra den avdissocierade gasen till ett absorptionskärl, innehållande en lämplig reagenslösning för gasens i fråga påvisande. Den erhållna upphettningskurvan jämföres efter fullbordad reaktion med en andra dito, upptagen under i övrigt oförändrade förhållanden, sedan reaktionsprodukten fått svalna. Denna senare kurva (o-kurva) stiger hastigare, då ju därvid ej längre något värme förbrukas för dissociationen.[2] Den temperatur, där de båda kurvorna divergera, svarar vanligen mycket noggrant emot den temperatur, där i reagensröret de första spåren av reaktionsprodukten iakttagits. Följande kurvor (fig. 4), upptagna för järnspat skiljas tydligt vid 198°, och med tillhjälp av Ba $(OH)_2$-lösning iakttogs i en tämligen hastig gasström och vid långsam upphettning den första koldioxiden vid 200°.

Ett hastigt sönderfall av järnspatet äger emellertid ej rum förrän över 400°, där kurvan erhåller ett intervall av tydlig fördröjning (synes ej å figuren där origo betyder c:a 150° och kurvan således icke når upp till ifrågavarande temperaturområde).

C.

Vid studiet av reaktioner i pulverformiga system gör man ofta den iakttagelsen, att den observerade reaktionstemperaturen är beroende av kornstorleken och de i pulvret förefintliga ämnenas framställning eller förbehand-

[1] Jfr Zeitschr. f. anorg. Chemie *96* (1916), sid. 64 och *98* (1916), sid. 47.

[2] Skillnaden i spec. värme och värmeledningsförmåga mellan det ursprungliga pulvret och reaktionsprodukten spelar ingen så stor roll att man i allmänhet behöver fästa något avseende därvid.

ling. Vad först kornstorleken beträffar, åstadkommer en minskning av korndiametern en sänkning av reaktionstemperaturen. Vare sig det gäller en verklig reaktion mellan tvenne ämnen eller en termisk dissociation, så blir ju antalet på ytan förefintliga molekyler större ju finare pulvret är, och i ett sådant pulver uppnås således det för en på uppheltningskurvan iakttagbar effekt nödiga minimiantalet

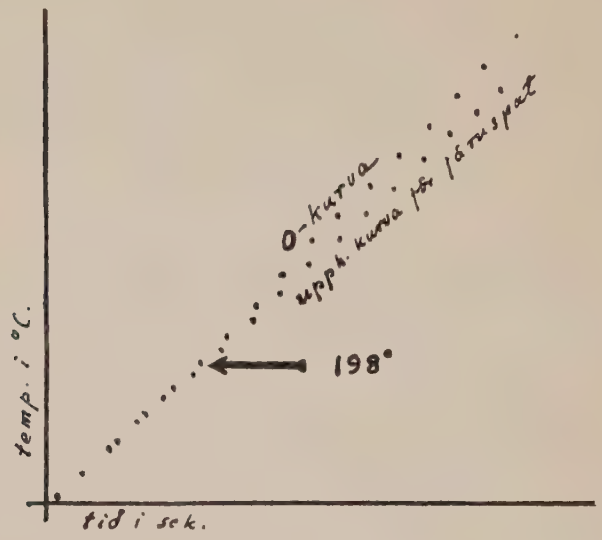


Fig. 4.

reagerande molekyler vid en lägre temperatur än i ett grövre pulver. Detta framgår med osedvanlig tydlighet av följande tabell.[1]

Den för ämnet eller blandningen karakteristiska reaktionstemperaturen är naturligtvis den lägsta observerade under iakttagande av de nödiga försiktighetsmått, vartill förut hänvisats. I allmänhet är en vanlig noggrann finrivning i agatmortel tillräcklig för att ej genom för stora korn erhålla felaktiga värden.

[1] Jfr Zeitschr. f. anorg. Chemie *96* (1916), sid. 64.

Tabell 2.

Reaktionssubstans	Reaktion	Reaktionstemperatur
Co_3O_4, framställd av pyroforisk CoO, som oxiderats i luften. Ytterst fint ljusbrunt pulver	$Co_3O_4 = 3\,CoO + \frac{1}{2}O_2$	912°
Co_3O_4, framställd genom upphettning av $CoCO_3$ vid 450°. Pulvret grövre än föreg. och mörkbrunt		922°
Co_3O_4, framställd genom upphettning av $Co(NO_3)_2$ vid 450°. Pulvret är täml. grovt och svart		952°

Av liknande anledning är vid samma temperatur ett ämne mer reaktivt, om det föreligger som fjäll än som korn. Detta kan lätt visas för Fe_2O_3, som genom upphettning av ett järnsulfat till 600 à 700° kan erhållas i en utpräglat fjällig, orangeröd form, men i brunvioletta, sfäriska korn genom upphettning av ett annat järnsalt. Den senare utbildningsformen är ej på långt när så reaktiv som den förra.[1] Upphettas den förstnämnda fjälliga formen över 1 000°, så blir även denna mörk och beständig mot reagenser. En undersökning i mikroskopet visar, att detta beror på att fjällen genom även i det fasta aggregationstillståndet verksamma ytspänningskrafter så småningom omvandlas i ekvidimensionalt utbildade korn. Som exempel på en dylik formförändring genom upphettning och dess inverkan på reaktionstemperaturen kan nämnas, att: Co_3O_4 upphettad i N_2 15 min. vid 800° gav ett hållpunktsliknande intervall på upphettningskurvan vid 946°, under det att ett på samma sätt under 30 min. upphettat preparat gav temperaturen 959°. Liknande förändring i reaktionsförmågan kan även iakttas i blandningar av Co_3O_4 och Al_2O_3, som upphettas för framställning av $CoO \cdot Al_2O_3$.[2]

[1] Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *121* (1922), sid. 216.
[2] Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *96* (1916), sid. 71.

Det är naturligtvis otänkbart, att i en pulverformig blandning genom en enda upphettning erhålla en fullständig omsättning. Först genom att upprepade gånger mala om produkten och upphetta igen kan ett åtminstone praktiskt taget fullständigt reaktionsutbyte erhållas, således genom ett upprepat förstörande av bildade skyddsskikt eller ett förnyande av kontaktytan mellan reaktionsämnena på annat sätt. Vid mycket hastigt förlöpande reaktioner synes emellertid dessa skyddsskikt icke i på långt när samma grad utgöra ett hinder för reaktionen, som i blandningar, där reaktionen förlöper långsammare. Så sker reaktionen i blandningar av BaO och $CuSO_4$ enligt $BaO + CuSO_4 = BaSO_4 + CuO$ redan vid första upphettningen till c:a 88 %[1], men vid den motsvarande långsammare reaktionen: $CaO + CuSO_4 = CaSO_4 + CuO$ till c:a 60 %. Det förefaller således, som om den stora reaktionsintensiteten i system, där reaktionen sker under utvecklande av stora värmemängder, skulle hindra reaktionsprodukten att bilda ogenomträngliga skyddsskikt. Om man upphettar en reaktionsblandning ytterst sakta ($< 1°/10$ sek.), så kan ett slags överhettning av blandningen äga rum. Det ser ut, som under sådana förhållanden skyddsskikten skulle kunna särskilt effektivt utvecklas och förhindra en reaktion med undantag av några få procent. Först sedan temperaturen stigit betydligt över den normala begynnelsetemperaturen sprängas i dylika fall dessa skikt och reaktionen sätter in på nytt med stor intensitet.[2]

Som i denna avdelning inledningsvis antytts, är det emellertid ej bara kornstorlek och skyddsskikt som inverka på reaktionsförloppet. Man får taga hänsyn även till den olika reaktiviteten hos olika modifikationer av ett ämne. Som man kan vänta är därvid den energirikare formen den mest reaktiva. Exempelvis må följande här omnämnas.

Två blandningar, den ena av CaO + amorf SiO_2, den

[1] Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *128* (1923), sid. 9 och *135* (1924), sid. 65.

[2] Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *128* (1923), sid. 10.

andra av CaO + kristobalit upphettades till 1 350° och 1 410° respektive. Trots den lägre upphettningstemperaturen, hade den förstnämnda blandningen reagerat upp till 6,9 %, den senare endast till 0,6 %.[1] I andra blandningar ha liknande resultat erhållits.

D.

En hel del metalloxider antaga i likhet med de nyss nämnda Fe_2O_3- och Co_3O_4-preparaten mycket skiftande egenskaper även vad utseendet beträffar. Som författaren i annat sammanhang mera ingående påpekat, har detta oxidernas förhållande flerstädes i litteraturen lett till antagandet av ett flertal olika kristalliniska faser för en och samma oxid. Vid försök att erhålla en motsvarande olikhet i reaktionsförmåga kunde dock aldrig någon annan skillnad härvidlag påvisas, än en genom olikhet i kornstorlek och kornform förklarbar. Författaren leddes av dessa försök till antagandet, att uppfattningen om olika kristallfaser *åtminstone i de flesta fall* vore felaktig och endast betingad av den ofta stora yttre olikheten för på olika sätt framställda preparat av samma oxid. Då en mikroskopisk undersökning av så små kristaller varom härvid är fråga endast med stor svårighet och osäkerhet var genomförbar, användes i stället det *Debye-Scherrer*ska förfaringssättet med röntgeninterferensbilder.[2] *Ett antal oxider, vilkas gitter som mineral eller som annan känd, lätt framställbar kristallform voro bekanta*, utvaldes och framställdes på möjligast växlande sätt. Av de så erhållna olika preparaten framställdes sedan motsvarande röntgeninterferensbilder, vilka jämfördes med upptagningar av nyss nämnda bekanta kristallformer. I intet fall visade sig därvid framställningssättet för ifrågavarande oxider (Fe_2O_3, Fe_3O_4, Al_2O_3, CoO, Co_3O_4, NiO, MgO, ZnO, CuO, SnO_2) ha influerat på gittrets utseende. Exempelvis kan i överensstämmelse härmed nämnas, att på 27 olika sätt framställda Fe_2O_3-

[1] Zeitschr. f. anorg. Chemie *98* (1916), sid. 57.
[2] Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *120* (1922), sid. 327.

preparat samtliga gåvo identiskt samma interferensbilder som järnglans.[1]

E.[2]

Den uppgift, som egentligen från början ledde författaren in på arbeten av här behandlad art, var undersökningen av den gröna produkt (*Rinmans grönt*), som erhålles, då man med tillhjälp av koboltlösning i blåsrörsanalysen provar på zink. Vid upphettning av en koboltoxid tillsammans med zinkoxid bildas även utan flussmedel den gröna substansen med avsevärd hastighet redan vid c:a 800°. Då det lyckats att erhålla analysrena produkter, visade det sig, att *Rinmans* grönt vore att betrakta som fasta lösningar av koboltzinkat i zinkoxid. Som fasta lösningar mellan metalloxider och överhuvudtaget metalloxidernas kemiska förhållande till varandra vid upphettning var ett då nästan obearbetat område, utsträcktes undersökningarna till reaktioner mellan CoO, NiO och andra metalloxider. Därvid konstaterades i ett flertal fall förvånansvärt hastiga och fullständiga omsättningar, även då flussmedel och omrörning icke ifrågakommo. Senare undersökningar ha dock visat möjligheten av mycket hastigare reaktioner i pulverformiga system (F. G.). Resultatet av nyss nämnda arbete blev ett antal förut okända fasta lösningar och föreningar. Av de förra må vidare nämnas:

$$CoO + MgO,\ CoO + NiO,\ CoO + MnO,\ NiO + MgO,\ NiO + MnO;$$

av föreningarna:

$$CoO \cdot Al_2O_3,\ 4\,CoO \cdot 3\,Al_2O_3,\ 2\,CoO \cdot SnO_2,\ CoO \cdot Ta_2O_5,\ NiO \cdot Al_2O_3,\ 2\,NiO \cdot SnO_2,\ CuO \cdot Al_2O_3$$ [3]

[1] loc. cit. 334.

[2] Jfr förf:s gradualavhandling: »Über Reaktionsprodukte von Kobaltoxyden mit anderen Metalloxyden bei hohen Temperaturen.» Uppsala 1915 och Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *103* (1918), sid. 249.

[3] Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *116* (1921), sid. 137 tills. m. *J. Heuberger*.

F.

En sorts reaktioner av särdeles stor intensitet har observerats i blandningar av superoxider och andra oxider.[1] Vid upphettning av BaO_2 tillsammans med en annan oxid inträffar i de flesta fall redan flera hundra grader[2] under bariumsuperoxidens dissociationstemperatur (800°) åtföljd av livlig värme- och syrgasutveckling. I de fall, då den inblandade oxiden kan vidare oxideras, som t. ex.: Cu_2O, MnO, MnO_2, Cr_2O_3, observerades emellertid ingen syrgasutveckling, om oxiden och BaO_2 blandades i reaktionsekvivalenta mängder, enligt:

$$BaO_2 + Cu_2O = BaO + 2\,CuO$$
$$2\,BaO_2 + MnO = BaMnO_4 + BaO$$
$$BaO_2 + MnO_2 = BaMnO_4$$
$$3\,BaO_2 + Cr_2O_3 = 2\,BaCrO_4 + BaO.$$

Varje oxid, som på det föreliggande stadiet eller ett högre kan betraktas som syreanhydrid, reagerar till ett salt, som t. ex. MnO, MnO_2 och Cr_2O_3 i föregående reaktionsformel. Svårare att förstå äro reaktionerna med icke sura och enligt gängse uppfattning icke oxiderbara oxider som MgO, CaO, CuO och CdO. Syreutvecklingen redan vid mycket låga temperaturer ur blandningar av dessa ämnen med BaO_2 ger intrycket av katalys. Antager man emellertid 800° som dissociationstemperatur för BaO_2, så kunna tydligen vare sig dessa reaktioner eller omsättningen mellan BaO_2 och SiO_2[3] rubriceras som katalys. Man måste efter allt att döma ha att göra med några intermediärt bildade lätt sönderfallande additionsföreningar. Något liknande synes även vara fallet i blandningar av

[1] De första ytliga resultaten ha tillsammans med *N. v. Zweigbergk* publicerats som ett slags första meddelande i Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *108* (1919), sid. 119 och tyvärr på grund av tidsbrist ännu inte fortsatts.

[2] Ett flertal av de i nämnda skrift angivna temperaturerna äro dock på grund av en då ännu ofullständigt utarbetad upphettningsteknik (jfr Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *135* [1924], sid. 69) för låga.

[3] Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *104* (1918), sid. 163.

olika superoxider. Redan vid ett par hundra grader kunna i dylika blandningar ytterst häftiga reaktioner äga rum, mer eller mindre häftiga alltefter oxidernas blandningsförhållande. Så t. ex. reagerar en blandning av $3\,BaO_2 + 1\,Na_2O_2$ intensivare än alla andra blandningar av dessa båda oxider.[1]

G.

Vid upphettning av en blandning av bariumoxid och kalciumkarbonat erhölls på upphettningskurvan vid c:a 350° en stark abnorm temperaturstegring och i fortsättningen visade kurvan vid 918° icke det för dissociationen av kalciumkarbonat karakteristiska horisontella förloppet, men däremot vid 1 360° den emot bariumkarbonatets termiska sönderfall svarande dissociationsknicken. Det var således tydligt att följande reaktion inträffat:

$$BaO + CaCO_3 = BaCO_3 + CaO.$$

Då en dylik omsättning vid så låg temperatur och med sådan hastighet och fullständighet innebar en alldeles ny erfarenhet, underkastades den och reaktioner av liknande art i andra blandningar en ingående granskning. De hittillsvarande resultaten av dessa, tillsammans med *J. Heuberger* utförda undersökningar ha publicerats i Zeitschrift für anorganische und allgemeine Chemie *122* (1922), sid. 181; *128* (1923), sid. 1; *135* (1924), sid. 49 och *140* (1924), sid. 243.

Den första av dessa avhandlingar behandlar mera kvalitativt de första iakttagna förloppen av denna art. Temperaturangivelserna i denna uppsats ha därför senare (i den tredje publikationen, sid. 79) korrigerats. I det följande kan av utrymmesskäl endast lämnas en mycket kortfattad redogörelse för dessa arbeten.

Som en generell formel för hittills undersökta »platsväxlingsreaktioner» kan antagas:

[1] Hithörande undersökningar ännu opublicerade.

$$MO + MeAc = MAc + MeO + Q,$$

där MO är en oxid av starkare baskaraktär än MeO och Ac är den negativa jonen av en syresyra.

Om dessa reaktioner kunna följande allmänna karakteristika anföras:

1) En reaktion äger rum, om Q betyder värmeutveckling;

2) Dessa reaktioner förlöpa utan förmedling av gasformiga eller flytande faser;[1]

3) Reaktionernas intensitet är större ju mer basisk MO är än MeO. Reaktionerna förlöpa på få sekunder eller bråkdelar därav, de livligaste till en fullständighet av 90 %. De mindre livliga hindras i högre grad av utbildade skyddsskikt;

4) Den temperatur, där reaktionen börjar, är högre ju mindre basisk den tillsatta oxiden är;

5) Reaktionstemperaturen beror såväl på arten av den tillsatta oxiden som på det använda saltslaget. Så reagera t. ex. alla sulfat inom ett begränsat, litet temperaturområde med BaO, men inom ett från det förra väl skilt temperaturområde med t. ex. CaO. Ett mindre inflytande av saltets kation kan även spåras;

6) Det reagerade pulvrets grad av sammanbakning är ett rent reaktionsfenomen och beroende av reaktionens intensitet och fullständighet.

Till förtydligande meddelas följande tabell över en del av resultaten vid undersökning av reaktionsförhållandena i blandningar av barium-, strontium- eller kalciumoxid med en serie olika karbonat eller sulfat.

I den tredje av nyss nämnda avhandlingar om platsväxlingsreaktioner finnas dessutom tabeller över motsvarande reaktioner med orto- och pyrofosfater.

[1] Jfr Platzwechselreaktionen zwischen festen Phasen IV, Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *140* (1924), sid. 243.

Tabell 3.

System	Temperatur, där reaktionen börjar	Dissociations-temperatur för	Den högsta vid försöket uppnådda temperaturen
$BaO + SrCO_3 = BaCO_3 + SrO$	398° ± 5	$BaCO_3$ c:a 1 360°	410°
$BaO + CaCO_3 = BaCO_3 + CaO$	344° ± 2	$SrCO_3$ c:a 1 140°	360°
$BaO + MgCO_3 = BaCO_3 + MgO$	345° ± 5	$CaCO_3$ c:a 915°	380°
$SrO + CaCO_3 = SrCO_3 + CaO$	464° ± 4	$MgCO_3$ c:a 545°	480°
$SrO + MgCO_3 = SrCO_3 + MgO$	456° ± 4		470°
$BaO + SrSO_4 = BaSO_4 + SrO$	372° ± 2	$BaSO_4$ > 1 300°	490°
$BaO + CaSO_4 = BaSO_4 + CaO$	370° ± 6	$SrSO_4$ > 1 130°	450°
$BaO + MgSO_4 = BaSO_4 + MgO$	369° ± 1	$CaSO_4$ > 1 060°	440°
$BaO + ZnSO_4 = BaSO_4 + ZnO$	341° ± 5	$MgSO_4$ > 940°	440°
$BaO + CoSO_4 = BaSO_4 + CoO$	328° ± 14	$ZnSO_4$ > 830°	440°
$BaO + CuSO_4 = BaSO_4 + CuO$	346° ± 0	$CoSO_4$ > 740°	480°
$SrO + CaSO_4 = SrSO_4 + CaO$	451° ± 5	$CuSO_4$ > 660°	540°
$SrO + MgSO_4 = SrSO_4 + MgO$	441° ± 3		550°
$SrO + ZnSO_4 = SrSO_4 + ZnO$	424° ± 3		490°

System	Temperatur, där reaktionen börjar	Dissociations-temperatur för	Den högsta vid försöket uppnådda temperaturen
$SrO + CoSO_4 = SrSO_4 + CoO$	431° ± 1		510°
$SrO + CuSO_4 = SrSO_4 + CuO$	418° ± 7		460°
$CaO + MgSO_4 = CaSO_4 + MgO$	c:a 540°		640°
$CaO + ZnSO_4 = CaSO_4 + ZnO$	520° ± 6		650°
$CaO + CoSO_4 = CaSO_4 + CoO$	533° ± 4		670°
$CaO + CuSO_4 = CaSO_4 + CuO$	516° ± 5		640°

Ortofosfaterna reagera på samma sätt, t. ex.:

$$2\,Me_3(PO_4)_2 + 6\,MO = 6\,MeO + 2\,M_3(PO_4)_2$$

men analogt reagera icke pyrofosfat således ej enligt:

$$Me_2P_2O_7 + 2\,MO = 2\,MeO + M_2P_2O_7$$

utan: $3\,Me_2P_2O_7 + 3\,MO = 2\,Me_3(PO_4)_2 + M_3(PO_4)_2$,

så att två ortofosfater bildas. Detta tyder på, att egentliga P_2O_7-grupper icke finnas i pyrofosfatgittren utan i stället PO_4- och PO_3-grupper.[1]

Som av tabellen framgår, nå icke ens de under försöken uppnådda *högsta* temperaturerna tillnärmelsevis upp till dissociationstemperaturerna och för övrigt ej på långt när ens till de temperaturer, där ett överhuvudtaget märkbart sönderfall av salterna äger rum.[2] Redan av denna anledning kunna dessa reaktioner icke hänföras till en reagerande *gasfas*. I »Platzwechselreaktionen zwischen festen Phasen

[1] Jfr Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *135* (1924), sid. 56.
[2] Jfr Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *128* (1923), sid. 7.

IV»[1] ha, dels med stöd av redan i det föregående framlagda fakta, dels ock på grund av nya undersökningar till full evidens klarlagts omöjligheten av en förklaring genom uppkomsten av *flytande* reaktionsskikt.

Reaktionerna äro således, trots stor intensitet, låg begynnelsetemperatur och hög fullständighetsgrad, verkliga omsättningar i fast aggregationstillstånd och kunna i grova drag förklaras på följande elementära sätt.

En hel del oxider, och framför allt de starkt positiva metallernas, absorbera (mer eller mindre intensivt) sura anhydrider, t. ex. CO_2 och SO_3. Platsväxlingsreaktionerna visa, att denna förmåga är så stark att ifrågavarande atomgrupper kunna lösslitas och attraheras även ur sådana kristallgitter, vari de kunna tänkas existera som delar av andra grupper (CO_3, SO_4). För att detta skall kunna ske måste emellertid temperaturen höjas tillräckligt, motsvarande en viss av oxidens attraktionsförmåga på atomkomplexen i fråga bestämd minimirörlighet i saltgittret. I analogi med det förhållandet att BaO absorberar t. ex. SO_3 mera energiskt än SrO och SrO åter mera energiskt än CaO, så ligger alltså reaktionstemperaturen för BaO med t. ex. $CuSO_4$, lägre (346°) än för SrO (418°) och denna åter lägre än för CaO (516°). Eller med andra ord, det fordras alltså en motsvarande större uppluckring av kristallgittret för att en svagare attraherande oxid skall lyckas bryta loss de åsyftade brottstyckena av gittergruppen. Nu ha *Schæfer* och *Schubert*[2] visat att salternas anioner i vissa här tillämpbara fall kunna betraktas som självständiga svängningskomplex, alltså åtminstone i hög grad oberoende av den i saltet ingående metallen. Det förhållandet, att en oxid vid dessa platsväxlingsreaktioner reagerar med t. ex. ett sulfat — likgiltigt vilket — vid ungefär samma temperatur är en uppenbar kemisk bekräftelse på *Schæfers* och *Schuberts* på helt annan väg nådda resultat.

För att ytterligare pröva hållbarheten av detta betrak-

[1] Jfr Zeitschr. f. anorg. u. allgem. Chemie *140* (1924), sid. 243.
[2] Wied. Ann. *1916*, sid. 283.

telsesätt undersöktes omvandlingssynpunkternas inflytande på reaktionstemperaturerna. I det föregående har påvisats, att en salttyp t. ex. sulfat reagerar med de tre oxiderna inom tre för dem karakteristiska och väl åtskilda temperaturintervall. Tager man nu ett salt med en omvandlingspunkt, bör detta, om ovanstående resonemang är riktigt, inverka så, att de reaktionstemperaturer som normalt skulle ligga högre än omvandlingstemperaturen i stället böra tämligen nära sammanfalla med denna. Ty vid omvandlingspunkten är rörligheten i kristallgittret tillräcklig även för en oxid, som vid temperaturen i fråga eljest ej skulle ha reagerat. En reaktionstemperatur, normalt belägen under omvandlingstemperaturen, röner däremot naturligtvis av omvandlingen intet inflytande. Vid försöken användes analyserat rent silvernitrat och silversulfat med omvandlingstemperaturerna 160° och 411° respektive. *Med silvernitrat reagerade samtliga tre oxider mellan 164° och 172° och med silversulfat reagerade bariumoxid normalt vid 342° strontiumoxid och kalciumoxid (vilka normalt skulle ha reagerat vid c:a 450° och 510° som med andra sulfat) däremot båda vid 422°.* En mycket god bekräftelse således!

Man skulle emellertid enligt ovanstående resonemang i förstone kunna tycka, att en viss oxid t. ex. BaO borde med en viss salttyp t. ex. sulfat reagera vid *precis* samma temperatur med alla sulfat, som ej hade några omvandlingspunkter och icke bara inom ett begränsat temperaturintervall som försöken visa. Ett närmare betraktande visar emellertid, att så icke kan vara fallet. De observerade reaktionstemperaturerna äro nämligen de temperaturer där omsättningen nått en tillräcklig hastighet för att kunna observeras på upphettningskurvan. Om vi t. ex. fortfarande hålla oss till systemet $BaO + CuSO_4$ fordras det med andra ord ett visst minimiantal sönderspräng da SO_4-grupper per tidsenhet för att erhålla en utvecklad värmemängd, tillräckligt stor för att i form av en knick uppträda på kurvan. Den hastighet, med vilken SO_4-grupperna på detta sätt sönderfalla, synes emellertid vara lika individuell för

ett visst sulfat, som det därmed intimt besläktade rent termiska sönderfallet. I två blandningar av t. ex. BaO och två sulfat, där reaktionsvärmet är ungefär lika, måste begynnelsetemperaturen därför ligga högre för det sulfat, vars SO_4-grupper splittras långsammare. På grund av undersökningsmetodens art äro emellertid differenserna i allmänhet ej stora (se tabell 3). I dessa differenser ha vi emellertid otvivelaktigt ett uttryck för ett visst inflytande även av saltets kation.

Det är författarens övertygelse att vi för närvarande stå inför begynnelsen av en de fasta fasernas kemi. Därpå tyda många tecken. Icke minst det intensiva bearbetandet av kristallgittren från kristallografisk och fysikalisk synpunkt. Ännu så länge har kemien haft för fullt upp att göra med reaktionsförhållandena i system innehållande flytande och gasformiga faser för att i större utsträckning ha kunnat ägna sig åt system med endast fasta faser. Utan tvivel ha vi dock i dessa system i flera hänseenden om jag så får säga ovanligt renodlade reaktionsfenomen och redan nu brukar författaren använda en del av dessa mycket hastigt förlöpande »platsväxlingsreaktioner» i pedagogiskt syfte.

Man kan t. ex. demonstrera den olika affiniteten mellan t. ex. BaO, SrO, CaO och t. ex. SO_3 genom de olika reaktionstemperaturerna för dessa oxider med t. ex. vattenfritt $CuSO_4$ (jfr sid. 20, 21). Tänker man sig oxiderna som magneter med från BaO till CaO avtagande styrka och den ur $CuSO_4$ utbrytbara SO_3-kombinationen som ankare, så visar den från BaO till CaO stigande reaktionstemperaturen att svängningsamplituderna måste göras större, d. v. s. det momentana minimiavståndet mellan reaktionskomplexen mindre från kombinationen $BaO + CuSO_4$ till $CaO + CuSO_4$.

Om synkronmaskinen, trefassystemet och induktionsmotorn.

Av EINAR ZACHRISSON.

I somras bad mig lektor Gallander att för den tredje upplagan av sin bok: »Elementär elektricitetslära» vara sig behjälplig med omarbetande av kapitlet om växelströmsmaskiner. Resultatet blev efterföljande utkast, som dock ansågs vara alltför detaljerat för att kunna finna plats inom ramen av hans lärobok, men som lektor Gallander föreslog skulle tryckas i denna tidskrift, till en komplettering för intresserade, med tanke särskilt på de tekniska läroverkens icke elektriska fackavdelningar.

Som förf. är elektrisk ingenjör och därför sedan ungdomen inarbetad i den grundläggande maskinteorien, är det måhända svårt att ibland fatta svårigheterna för nybörjaren. Därför är jag tacksam för kritik och påpekanden i detta mitt försök att popularisera elektrotekniken, en lika svår som i våra dagar nödvändig uppgift.

Lektor Gallander har välvilligt sörjt för att om någon lärare skulle befinnas vilja sätta detta fragment i händerna på sina elever, separattryck av uppsatsen kunna erhållas.

Växelströmsgeneratorer (synkrona).

Växelström alstras, om man frånser radiotekniska apparater, alltid med generatorer, där den e. m. k.-en, i likhet med vid likströmsmaskinerna, bildas genom elektriska ledares rotation i ett i maskinen förefintligt magnetiskt fält.

I fig. 1 tänkas, i enlighet med numera vanligt utförande, likströmsmagneterna anbragta på »rotorn», alstrande ett

roterande magnetiskt flöde. Induktionslinjerna skäras av den i ett spår i armaturjärnet nedbäddade härvans båda sidor, i vilka induceras e. m. k.-er, som i varje ögonblick adderas. Härvans ytteruttag anslutas till ytterledningen.

För det i bilden visade läget är den tillfälliga riktningen inritad hos den ström, som skulle alstras av denna e. m. k., om den yttre strömkretsen vore sluten genom ett ohmskt motstånd. Det är uppenbart, att om magnetfältet vrides runt, storleken och riktningen hos denna e. m. k. e skall ändras. I det visade läget har e t. ex. ett positivt maximivärde; när nordpolen efter ett kvarts varv befinner sig vid 2, blir $e=0$, vid 3, efter $^1/_2$ varv, antager e ett negativt maximivärde för att, efter att i 4 efter $^3/_4$ varv åter passerat värdet 0, i 1 efter ett helt varv återtaga sitt i bilden visade värde. Under ett varv av maskinen har den alstrade växelspänningen sålunda genomlöpt »en period». Antalet perioder pr sek. blir alltså i denna 2-poliga maskin lika med antalet varv pr sek. hos rotorn. Hade maskinen haft p st. poler, skulle periodtalet hava varit $\frac{p}{2} \cdot \frac{n}{60}$, där n är maskinens varvtal pr min.

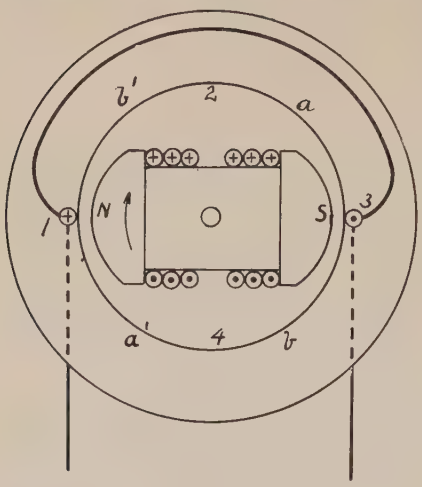


Fig. 1. Växelströmsgenerator.

Liksom vid likströmsmaskinerna utföres den del av den magnetiska kretsen, som är utsatt för ett magnetiskt flöde av växlande riktning och som här är den stillastående »statorn», av speciella järnplåtar, isolerade inbördes genom tunna papper.

Tilledningen av likström till det roterande fältet utföres

med två st. å rotorn anbragta s. k. släpringar av järn eller metall, vilka äro anslutna till magnetlindningens uttag och till vilka strömmen ledes genom å ringarna släpande borstar av kol, grafit eller metall. För att alstra den för växelströmsgeneratorns drift nödvändiga likströmmen måste oftast särskilda mataremaskiner tillkomma, vilka numera mestadels sättas på samma axel som huvudmaskinen.

Den i fig. 1 visade generatorn, där endast en yttre strömkrets förekommer, kallas *enfasgenerator*.

Parallellkoppling och parallelldrift. Synkronmotorn.

Två eller flera växelströmsgeneratorer kunna köras parallellt, d. v. s. de kunna samtidigt vara inkopplade och lämna »kraft» till ett gemensamt ledningsnät.

När en växelströmsgenerator skall kopplas in på nätet, böra, såsom vid likströmsmaskiner, polspänningarna vara lika stora på ömse sidor om den strömställare, varmed tillkopplingen sker. Detta vill dock vid växelström säga, att i tillkopplingsögonblicket icke endast spänningarnas effektivvärden (mätta med voltmetrar) skola vara lika, utan även deras momentvärden. Detta kan icke inträffa i andra fall än då båda växelspänningarnas sinuskurvor under några sekunder sammanfalla, vilket inträffar endast då maskinens hastighet är den, som motsvarar periodtalet på nätet, samtidigt som de båda spänningarna ligga i fas med varandra. För att vid inkopplingen giva upplysning om dessa senare förhållanden användas antingen s. k. synkronoskop eller ock faslampor. Fig. 2 visar i princip inkopplingen av dessa senare vid en enfasgenerator. Lamporna visa, om det mellan dem av strömställarens kontakter, som stå i begrepp att slutas, före-

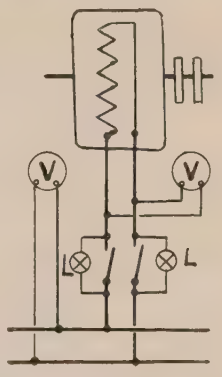


Fig. 2. Inkoppling av instrument för fasning. V: voltmeter. L: lampa.

finnes någon spänning, samtidigt som man med voltmetrarna kan kontrollera, att effektivspänningarna äro lika på generatorn och på det nät, där den skall inkopplas. Om maskinens och nätets periodtal äro mycket avvikande från varandra, tändas och slockna lamporna omväxlande i rask följd. Vid nästan riktig hastighet bliva dessa flämtningar mycket långsamma. När lamporna så äro mörka, passar man på att slå in strömställaren.

Vid parallelldrift mellan växelströmsgeneratorer måste, för att de inducerade spänningarnas momentvärden hela tiden skola samtidigt ändra sina tecken, maskinerna gå i fas, d. v. s. polhjulen måste troget följa varandra pol för pol med samma hastighet. Skulle detta icke vara fallet, utan skulle t. ex. en maskin vid något tillfälle komma efter en pol, då skulle ju värdet på dess e. m. k. ändra tecken och en stark strömrusning (kortslutning) uppkomma, eftersom två e. m. k.-er då skulle seriekopplas över ett mycket litet motstånd. Maskinen säges då hava »fallit ur fas».

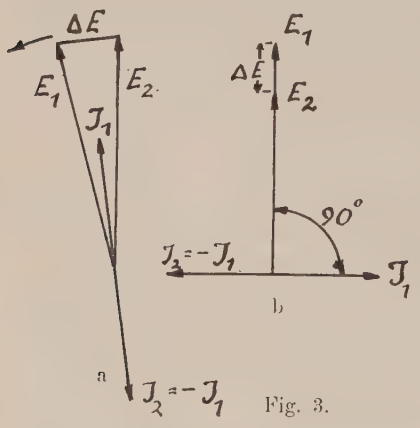


Fig. 3.

På grund av denna egenskap kallas maskiner av denna typ för *synkronmaskiner* (synkron=samtidig).

För att två synkrona maskiner på detta sätt skola kunna gå med exakt samma hastighet i fas med varandra, erfordras, att om de av någon orsak skulle vilja skiljas åt, de sammanhållas av en uppkommande elektro-mekanisk kraft. Så är även förhållandet. Om, i fig. 3 a, den ena generatorn med den inducerade spänningen E_1 (effektivvärde) erhåller ett pådrivande moment och alltså skulle vilja gå före den andra med den inducerade spänningen E_2, uppkommer en spänningsskillnad $\triangle E$. Denna driver en ström genom båda

maskinerna, som på grund av att motståndet i dessa är huvudsakligen induktivt, kommer att ligga c:a 90 fasförskjuten gentemot $\triangle E$. Den första maskinen måste alltså på grund av sitt försprång lämna effekten $\triangle P = E_1 I_1 \cos \varphi_1 = \sim E_1 I_1$, den andra maskinen mottaga samma effekt, och härigenom hållas maskinerna i fas.

Liksom vid ett pådrivande moment synkronmaskinen sålunda får en liten försprångsvinkel och som generator lämnar effekt till en annan maskin eller i allmänhet till nätet, så kommer den att vid bromsning av axeln med ett lastmoment sacka efter en liten vinkel och gå som *synkronmotor*. Om en synkronmaskin lämnar elektrisk effekt som generator eller mekanisk effekt som motor, beror således helt och hållet på om dess axel pådrives av en drivmotor, t. ex. en vattenturbin eller bromsas av ett lastmoment, t. ex. en pump eller fläkt.

En god mekanisk analogi till synkronmaskinen i parallelldrift bildar en kuggväxel med fjädrande axel. Om två dylika kombinationer drivas av var sin oberoende drivmotor och verka på en gemensam axel (fig. 4), inses, att drivmotorerna måste följas åt kugg för kugg samt att växlingarna i den ena eller andra motorns drivmoment åstadkomma motsvarande ändringar i deras försprångsvinklar. På samma sätt gå synkronmaskinerna sammankuggade, fastän med elektromagnetiska krafter, och den dem sammanhållande synkroniseringskraften har samma natur som en fjäder, som spännes.

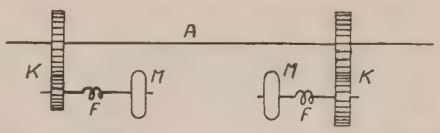


Fig. 4. Mekanisk analogi till parallelldrift mellan synkronmaskiner.
M: drivmotorer. F: fjäder. K: kuggväxel. A: axel.

Genom reglering av magnetströmmen kan tydligen icke hastigheten hos en med ett stort nät parallellarbetande synkrongenerator eller synkronmotor ändras, eftersom denna är bunden av nätets periodtal, vilket i sin tur bestämmes av turbinernas hastighetsregulatorer i de största kraftsta-

tionerna på nätet. Ej heller kan på detta sätt ifrågavarande synkronmaskins effekt ändras, emedan denna bestämmes av den mekaniska effekt, som till- resp. bortföres från axeln, och denna senare vid vanliga mekaniska drivmotorer eller belastningsobjekt ej kan ändras utan hastighetsändring hos synkronmotorn, vilken vi nyss sågo vara omöjlig.

Då nu varken hastighet eller effekt kunna ändras genom magnetiseringen, måste spänningen och, i den mån denna hålles konstant på det stora nätet, den wattlösa delen av armaturströmmen $I \sin \varphi$ göra det. Fig. 3 b förklarar något denna sak. Tänkas två synkronmaskiner med olika magnetiseringsströmmar och olika inducerade spänningar E_1 och E_2 gå i fas, och tänkes vidare intet effektutbyte äga rum mellan dem, d. v. s. E_1 och E_2 äro likriktade, kommer spänningsskillnaden $\triangle E$ att framdriva en ström genom de induktiva maskinmotstånden, som ligger 90° fasförskjuten gentemot E_1 och E_2, d. v. s. endast en wattlös ström I_1 uppkommer.

Genom att ställa in magnetiseringen på en synkronmaskin olika kan man alltså reglera den wattlösa ström, den avger till eller mottager från nätet. Inställes mer magnetström än som går åt att vid förhandenvarande mekaniska belastning magnetisera maskinen själv, då kommer den att lämna wattlös ström ut på nätet och hjälpa till att vidmakthålla alla de magnetiska växelflöden, som finnas i alla induktiva motstånd hos linjer, transformatorer och motorer. Dylika växelflöden kräva ju 90° fasförskjutna strömmar eller spänningar, som då täckas av de wattlösa strömmarna från dessa »övermagnetiserade» synkronmaskiner. På samma sätt kan, om synkronmaskinens likströmsmagnetisering minskas under en viss gräns, denna ej bliva tillräcklig för maskinens egna behov, utan måste denna delvis magnetiseras från nätet genom wattlösa strömmar av motsatt riktning mot förut. Dessa strömmar måste då tagas från andra parallellarbetande synkrona maskiner.

Synkrona maskiner användas mest som generatorer. Som motorer finna de dock även en allt större använd-

ning på grund av sin nyss skildrade förmåga att leverera wattlös ström till magnetisering (kompensering av fasförskjutning). En stor nackdel är dock, att synkronmotorerna för igångsättningen kräva alldeles särskilda anordningar och för sin magnetisering en likströmsmatare.

Trefassystemet.

Tänkas på maskinen i fig. 1 ytterligare två härvor inlagda mellan a och a' samt mellan b och b' med 120° vinkel mellan härvornas begynnelseändar, erhållas från de tre härvorna lika stora spänningar med en inbördes fasförskjutning av $120° = \frac{2\pi}{3}$ rad.

$$e_1 = E \sin \omega t$$

$$e_2 = E \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e_3 = E \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Vektordiagrammet för dessa spänningar visas i fig. 116 (Gallander, Elektricitetslära). Genom sammankoppling av de tre strömkretsarna på lämpligt sätt erhålles ett *trefassystem*.

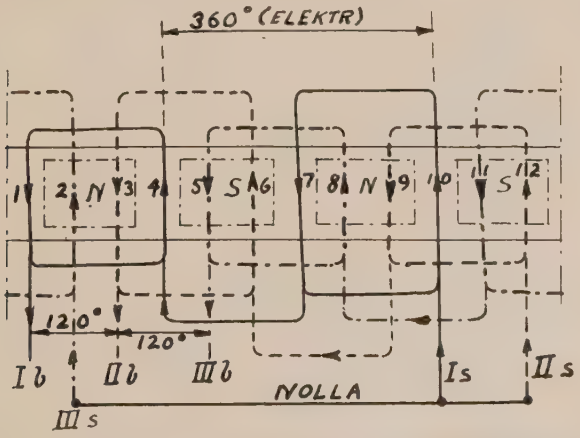


Fig. 5. Utbredning av statorlindningen hos 4-polig 3-fasgenerator.

Fig. 5 visar i princip kopplingen av en 4-polig 3-fas-synkronmaskin. Armaturen tänkes sedd inifrån maskinens centrum med rotorn borttagen och utbredd i plan, och polerna äro för ett visst läge inprickade. Till fas *I* höra två härvor, den ena i spår 1 och 4, den andra i spår 7 och 10, vilka härvor äro förbundna så, att de inducerade e. m. k.-erna, som alla ligga i fas, adderas. Början av fas *I* betecknas med *Ib*, slutet med *Is*. De andra faserna *II* och *III* äro inritade med iakttagande av, att begynnelse-uttagen ligga 120 elektriska grader[1] åtskilda. Slututtagen på alla faserna äro förenade i en »nollpunkt» eller »nolla». Man säger då, att maskinen i detta fall är Y-kopplad eller stjärnkopplad.

Y-koppling eller stjärnkoppling.

Fig. 6 visar dels en förenklad bild av Y-kopplade lindningar, dels vektordiagram över spänningarna. E_{01}, E_{02} och

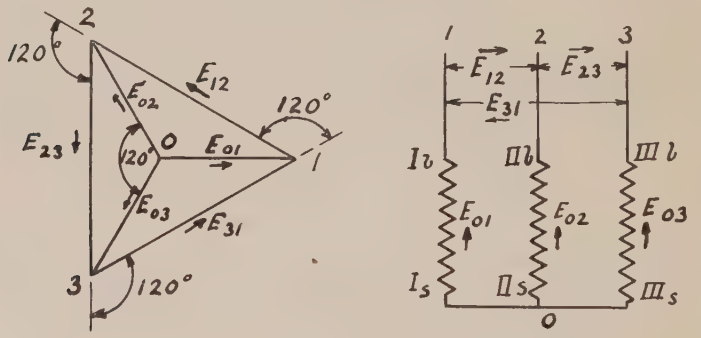


Fig. 6. Y-koppling.

E_{03} äro spänningarna mellan början och slutet av faserna eller med andra ord »fasspänningarna». Spänningen mellan två och två av de tre linjetrådarna, som äro anslutna till 1, 2 och 3 erhålles nu genom att addera spänningarna mellan t. ex. *Ib* och *Is*, d. v. s. $-E_{01}$, och mellan *IIs*

[1] En nord- och en sydpol motsvara tillsammans 360 elektriska grader.

och $II\,b$, d. v. s. E_{02}. Som resultat erhålles »huvudspänningen» E_{12}. Alla huvudspänningarna E_{12}, E_{23} och E_{31} bliva, som fasspänningarna, numeriskt lika och hava likaledes sinsemellan en fasförskjutning av 120°.

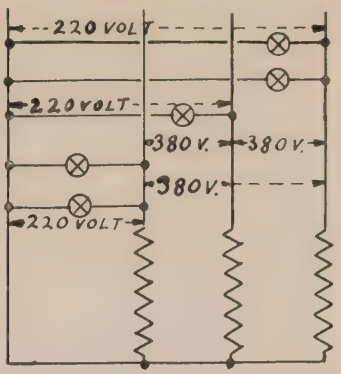


Fig. 7. Y-koppling med nolledare.

I det praktiska livet menas med ett trefassystems spänning alltid huvudspänningen, därest intet annat nämnes. En trefasledning består i vanliga fall av de tre isolerade ledningarna från generatorns linjeuttag. Endast i det fall, att man önskar använda fasspänningen för belysning eller andra ändamål, utdrages även en 0-ledning från generatorn eller transformatorn. På detta sätt kan t. ex. 220 volt erhållas för belysning från ett 380 volts trefassystem (fig. 7)[1].

△-koppling eller triangelkoppling.

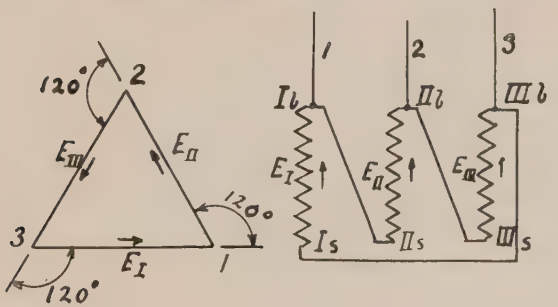


Fig. 8. △-koppling.

Vid denna koppling förbindes början av en fas med slutet på nästa. Här komma linjespänningarna att alstras

[1] Brinna lika många lampor mellan varje fas och nollan, bliva strömstyrkorna på olika faser, liksom spänningarna, lika stora och 120° fasförskjutna. Summan av de tre fasströmmarna blir då noll, eftersom den geo-

i endast en av faslindningarna i generatorn (fig. 8). Någon nollpunkt finnes i detta fall icke i någon punkt av lindningarna.

Trefas induktions- eller asynkronmotorer.

Denna är den mest använda motorn på trefasnät. Den är i konstruktivt hänseende den enklaste av alla elektriska motorer, och skälet till att våra växelströmsnät i regel byggas trefasiga ligger huvudsakligen i möjligheten att använda trefas-induktionsmotorn.

Induktionsmotorns stator är i princip fullt överensstämmande med en synkronmaskins. Rotorn däremot har inga likströmspoler, utan är försedd med en i princip likadan trefaslindning som statorn, vilken lindning ävenså är förlagd i spår i laminerad plåt. Rotorlindningens tre uttag anslutas över tre släpringar till ett startmotstånd. (Se Gallander, fig. 119—121)

Vid igångsättning inställes startmotståndet på högsta möjliga ohmtal och statorlindningen anslutes direkt till trefasnätet. Sedan kopplas startmotståndet ur så småningom, under det att motorn alltmer antager full hastighet.

Ofta hava mindre induktionsmotorer i stället för trefaslindning och släpringar s. k. kortslutningslindning. I rotorspåren förläggas kopparstavar, som på båda sidor sinsemellan förbindas med två »kortslutningsringar» av koppar. I detta fall sättes motorn i gång helt enkelt genom att slå in strömställaren för statorlindningen. Då härvid en rätt kraftig strömstöt dock uppkommer, plägar man förminska denna genom att igångköra motorn med reducerad spänning och först, sedan den kommit i gång, koppla över till full spänning.

Induktionsmotorns verkningssätt förstås bäst, om man

metriska summan av tre dylika vektorer, såsom omedelbart inses vid betraktande av fig. 116 i Gallanders elektricitetslära, bliva noll. Om man visste, att alltid lika många och stora lampor skulle brinna på varje fas (vilket naturligtvis sällan inträffar), kunde alltså nolledningen borttagas utan att något i elektriskt hänseende ändrades.

till en början tänker sig dess stator ersatt med ett hjul med motsvarande antal likströmsmagneter, som kringvrides för hand med ett visst varvtal pr min. n_s (fig. 9) och som för detta ändamål är rörligt lagrad. Rotorn tänkes för enkelhetens skull som kortslutsankare. När likströmsmagneterna nu kringvridas, skäras dessas flöden av de kortslutna ledarna, och följaktligen induceras genom rotationsverkan strömmar

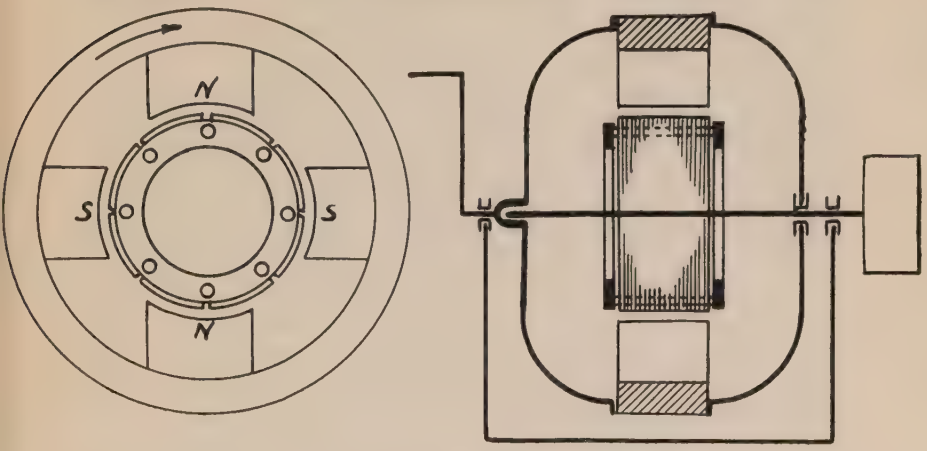


Fig. 9. Elektromekanisk analogi till induktionsmotorn.

i dessa, som tillsammans med de magnetiska induktionslinjerna åstadkomma krafter, som enligt Lenz' lag vill hindra den rörelse, varigenom induktionsströmmarna uppkomma. De elektromagnetiska krafterna hava med andra ord en sådan riktning, att de båda systemen bringas att stå stilla i förhållande till varandra, d. v. s. rotorn suges med och vill antaga en hastighet, som närmar sig den för hand kringvridna statorns.

Rotorns hastighet blir beroende av den kraft, varmed remskivan bromsas. Den blir aldrig exakt lika med statorns hastighet, såsom vid synkronmaskinen, emedan, om så vore, inga strömmar skulle induceras i rotorledarna och drivmomentet följaktligen skulle bliva noll, utan rotorn har alltid en viss »eftersläpning», så stor, att det elektromagne-

tiska drivmomentet blir lika med motorns lastmoment. Ju större detta senare blir, desto större blir eftersläpningen och de i rotorn inducerade strömmarna samt, inom vissa gränser, drivmomentet. Vid en normal induktionsmotor blir eftersläpningen vid fullast endast ett par procent av normal hastighet.

Från ovan visade egenskaper har motorn fått sina namn: »induktionsmotor», emedan rotorströmmarna alstras genom induktion, »asynkronmotor» (=icke synkron motor), emedan den ej har alldeles konstant hastighet.

Ersätter man nu det för hand kringvridna magnetsystemet med induktionsmotorns verkliga stator, så erhålles genom dennas anslutning till trefasnätet ävenledes ett roterande magnetfält, fastän detta uppkommer och underhålles på elektrisk väg i stället för med den mekaniska rörelsen. I större läroböcker visas matematiskt, hur tre lika stora strömmar med lika fasförskjutning, som framgå i var sin av de tre trådarna i en trefaslindning, tillsammans alstra en roterande m. m. k. och ett roterande magnetiskt flöde. Här skall endast i korthet påpekas, varför det måste förhålla sig på detta sätt.

Vi hava sett, huru trefassystemets spänningar alstras i en synkronmaskins stator genom rotation av ett magnetfält med likströmspoler. Eftersom induktionsmotorn har samma slags lindningar på statorn och dessa matas med samma trefasspänningar som synkrongeneratorn avger, inses, att dessa spänningar även i induktionsmotorn kunna anses inducerade av ett roterande fält. Alldeles som vid likströmsmotorn alstras ju en mot-e. m. k., som blir lika med, men motsatt klämspänningen, om spänningsfallet i lindningen försummas. Detta roterande fält eller flux, som slutes i statorns och rotorns plåtpartier och passerar luftgapet på en poldelnings avstånd mellan nord- och sydpol, alstras i induktionsmotorn ej genom rotorns kringvridning, utan genom växelströmmar, som flyta fram i motorns och motsvarande trefasgenerators lindningar. Det är egendomligt att se, huru genom den elektriska förbindelsen mellan

maskinerna det mekaniskt roterande fältets egenskaper överföras till induktionsmotorn.

De vid belastning av remskivan hos rotorn i fig. 9 uppstående rotorströmmarna alstrade, som vi förut sett, med tillhjälp av de magnetiska induktionslinjerna ett drivmoment, som naturligtvis måste balanseras av ett mekaniskt drivmoment å veven. I den verkliga induktionsmotorn ersättes den sålunda tillförda mekaniska effekten av en elektrisk effekt, som tillföres statorn. Detta tillgår så, att de belastningsströmmar, som induceras i rotorn, måste magnetiskt motvägas av strömmar i statorlindningen, för att de ej skola inverka störande på det av de konstanta trefasspänningarna alstrade konstanta roterande flödet. De så uppkomna statorströmmarna äro belastningsströmmar, som bilda den tillförda elektriska effekten. (Jfr teorien för transformatorn!)

Andra växelströmsmaskiner.

Två nackdelar hos den vanliga induktionsmotorn är att dess hastighet är bunden till det roterande fältets hastighet och ej, såsom likströms-shuntmotorns, på ett enkelt sätt låter ställa in sig på olika värden, samt att den för sin magnetisering kräver tillförsel av wattlösa strömmar från en synkronmaskin. En hel del anordningar förefinnas för att råda bot för dessa olägenheter, samtidigt eller var för sig.

Ett enkelt exempel på en av dessa maskiner för »faskompensering» ger »autosynkronmotorn», som är en induktionsmotor, och startas som sådan, men i vilkens rotor därpå införes likström. Härigenom kommer motorn att få synkronmotorns egenskaper vid gång, inklusive gynnsam fasförskjutning, men blir lättare att köra i gång än denna.

För att överföra kraft mellan två växelströmssystem med olika periodtal eller från växelström till likström eller mellan två likströmssystem av olika spänning användas motorgeneratorer, d. v. s. en kombination av en motor,

ansluten till det ena systemet, och en av denna driven generator, som matar ut på det andra systemet. Sådana motorgeneratorer användas t. ex. för att omforma 3-fasström med 25 eller 50 per. till 1-fasström med $16\frac{2}{3}$ per. för drift av stambanan Stockholm—Göteborg (2 st. synkronmaskiner på samma axel), och exempelvis i Stockholm och Göteborg finnas motorgeneratorer för omformning till likström från 3-fasström, erhållen från Untra vid Dalälven eller ångstationen i Värtan resp. Trollhättan (induktionsmotorer eller synkronmotorer, kopplade till likströmsgeneratorer).

För omformning till likström användas även ofta s. k. »enankaromformare», som i princip äro likströmsgeneratorer, i vilkas ankare insläppes flerfasström med hjälp av släpringar, och »kaskadomformare», ävenså s. k. kvicksilverlikriktare och andra likriktare, där ångors och gasers egenskap att under vissa förhållanden släppa genom ström endast av en viss riktning nyttiggöres.

Som motorer på lokomotiv vid elektriska enfasbanor användes den s. k. »kompenserade enfasseriemotorn». Denna är i princip en vanlig seriemotor för likström med sådana modifikationer, som nödvändiggöras av växelströmmen. Likströmsmotorns princip är ju användbar även för växelström, eftersom dess rörelseriktning är oberoende av linjeuttagens polaritet. Vid växelströmsbanor använder man helst ett lågt periodtal för motorernas skull och enfas för att slippa mer än en kontaktledning i luften (jorden är återledning).

En enkel apparat för Pascals princip.

Av G. STARCK.

I allmänhet torde man inskränka sig till en demonstration av den kvalitativa sidan av Pascals princip — tryckfortplantningens faktum. För dess kvantitativa del, tryckets beroende av ytans storlek, finnas en del apparater konstruerade (se t. ex. Frick, Physikalische Technik, II), alla dock rätt komplicerade. Man kan i själva verket med mycket enkla hjälpmedel visa, att trycket är proportionellt mot ytan, på vilken det verkar. I det följande beskrivas två sådana apparater, en mycket enkel, en mera utvecklad.

Apparaten n:r 1 (fig. 1) består av två olika vida glasrör, nedtill förenade, delvis fyllda med glycerin (på grund av sin vattenlöslighet att föredraga framför feta eller mineraloljor). I vardera röret insättes en kolv, bestående av ett glasrör, nedtill slutet, upptill försett med en tunn mässingsplatta för vikternas placering. Stämplarna få icke röra sig alltför trögt; ett allsidigt spelrum av 0,1 mm är lämpligt. Deras vikter skola förhålla sig som genomskärningsytorna, alltså justeras med hagel.

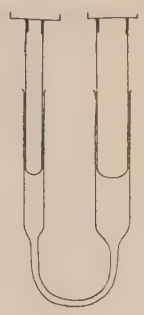


Fig. 1.

Vid jämvikt stå kolvarnas undre ytor lika högt. Man belastar kolvarna med vikter, som hålla varandra i jämvikt, och finner, att vikterna stå i ett konstant förhållande = förhållandet mellan genomskärningsytorna. Apparaten utgör en starkt förenklad, men mycket åskådlig modell av den hydrauliska pressen, och man kan lämpligen låta eleverna själva angiva de konstruktiva förändringar i modellen (ventiler), som äro nödvändiga för att göra den till en praktiskt användbar maskin.

Utseendet av apparaten n:r 2 framgår utan beskrivning av fig. 2. Här tillkomma kranar för att sätta rören ur funktion, emedan man ej bekvämt kan arbeta med mer än två rör på en gång. Följande siffror må anföras.

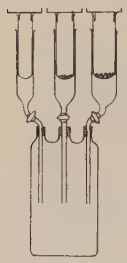


Fig. 2.

Diametrar	16,9,	21,3 ,	26,7 mm
(»)^2	1 :	1,59:	2,50
Provrörens vikt	21,1,	33,5 ,	52,6 g
	= 1 :	1,59:	2,50
Belastning vid jämvikt	50,	80 ± 5,	125 ± 10 g

Då apparaten ej användes, skola stämplarna vara borttagna på grund av läckaget.

Apparat för bestämning av vattnets ångtryck.

Av G. STARCK.

Den här beskrivna apparaten är avsedd för laborationsförsök och för övrigt endast en variant av många tidigare beskrivna anordningar för samma ändamål.[1] Den består av en öppen kvicksilvermanometer, 90 cm lång och fastsatt på en träplatta med skalor, en bakom varje rör. Det ena röret är förbundet så som figuren visar, med kärlet *A*, vars dimensioner äro 25 × 80 mm. *A* står i förbindelse med luften genom ett halvkapillärt glasrör, som kan tillslutas med en god ligatur (vakuumslang) och skruvklämmare.

Manometern fylles till hälften med kvicksilver. Genom växelvis uppvärmning och avkylning fylles hela den högra delen av apparaten med luftfritt vatten, *A* till hälften. Apparaten är nu färdig att tagas i bruk.

Genom försiktig kokning av vattnet i *A* utdrives luften, och medan kokningen pågår, tillslutes klämmaren. Man omger *A* med ett vattenbad och kan nu bestämma ångtrycket vid olika temperaturer. Även för några grader över 100 kan apparaten användas.

Vid det första försöket efter skedd påfyllning vill vattenpelaren vid låga tryck gärna gå sönder vid det högst belägna knäet, beroende på att vattnet ej varit fullt luftfritt. Om denna luftblåsa före nästa försök avlägsnas, brukar vattenpelaren förbliva hel. — Kärlet *A* är så lätt, även vattenfyllt, att det uppbäres av manometern och icke behöver fästas i stativ, en omständighet, som är gynnsam för apparatens hållbarhet.

[1] Flera författare i skilda årgångar av Z. phys. u. chem. Unt.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Matematiska uppgifter.

181. Produkten av 4 på varandra följande hela positiva tal kan ej vara en jämn kvadrat. *Iter.*

182. Tal med udda antal siffror och av följande beskaffenhet kunna ej vara primtal:

a) den första siffran 1, 5 eller 8 och de övriga treor,
b) » » » 7 » » » ettor,
c) » » » 8 » » » nior.

Iter.

183. Vilka tal x äro sådana, att $x+1$ och x^2+1 båda äro dubbelt så stora som två jämna kvadrater.

184. I en rätvinklig triangel är K skärningspunkten mellan höjden och den linje, som förenar de in- och omskrivna cirklarnas medelpunkter. Visa *a*) att K ligger på den linje som förenar de spetsiga vinklarnas bissektrisers fotpunkter, *b*) att K ligger på avståndet r från den räta vinkelns spets.

185. Uppgiv antalet reella rötter mellan 0 och 2π till ekvationen $4\sin^2 x+(1-m)\sin x+1=0$
för olika reella värden av m.

186. Om genom höjdernas skärningspunkt i en triangel (sidor a, b, c vinklar α, β, γ) drages en transversal, som skär sidorna under vinklarna α_1, β_1, γ_1 resp., och p, q, r äro tre icke sammanstötande segment av sidorna, så är

$$p \cdot q \cdot r = \pm abc \cot\alpha \cot\beta \cot\gamma \cot\alpha_1 \cot\beta_1 \cot\gamma_1 .$$

M—r.

Lösningar till uppg. i häft. 1. 1924—25.

169. *Att upprita en triangel, då man känner bissektrisen till en vinkel, samt höjderna mot de omfattande sidorna.*

Låt höjderna vara h_b, h_c och bissektrisen v, vilken träffar BC i V. Perpendiklarna från V mot sidorna äro lika och kallas h. Då fås omedelbart $\frac{h}{h_b}=\frac{VC}{BC}$, $\frac{h}{h_c}=\frac{VB}{BC}$. Således $\frac{h}{h_b}+\frac{h}{h_c}=1$, eller $\frac{1}{h}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$. h är således halva harmoniska mediet mellan h_b och h_c och konstrueras såsom fjärde proportionalen till h_b+h_c, h_b och h_c. Uppslås sedan en cirkel på $AV=v$ såsom diameter och h inpassas från V åt båda sidor, så fås läget av sidorna AB och AC, varefter konstruktionen är ytterst lätt.

Då h är $<$ såväl h_b som h_c, så möter inga svårigheter vid konstruktionen om blott $h<v$. Möjlighetsvillkoret är således

$$\frac{h_b h_c}{h_b+h_c}<v \text{ eller } \frac{1}{v}<\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

Anm. Skulle v i stället vara yttervinkelsbissetris till α, så löses problemet på snarlikt sätt, och möjlighetsvillkoret blir

$$\frac{1}{v}<\left|\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right|.$$

Löst av *X*, *Arbo* och *C. P.*

170. *I varje triangel är den inskrivna cirkelns radie mindre än eller lika med hälften av den omskrivnas.*

I. Ur den bekanta figuren (fig. 1) fås omedelbart

$$OO_1=\frac{a}{\cos{}^{\alpha}/_{2}}=\frac{2\varrho\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\geqq r+r_a=r+r+2\varrho\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\because\ \varrho\sin\alpha\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\geqq r\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\because \frac{r}{\varrho} \leqq \frac{\sin\alpha\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} - 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - 2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \leqq {}^1/_2 .$$

II. Ur uppgift 157 (årg. 8 häft. 1) ses, att avståndet mellan de in- och omskrivna cirklarnas medelpunkter är $= \sqrt{\varrho(\varrho-2r)}$, vilket endast blir reellt för $\varrho \geqq 2r$.

III. $$\varrho = \frac{abc}{4T} = \frac{8\varrho^3 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{4rp} .$$

Men $r^2p^2 = T^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) =$

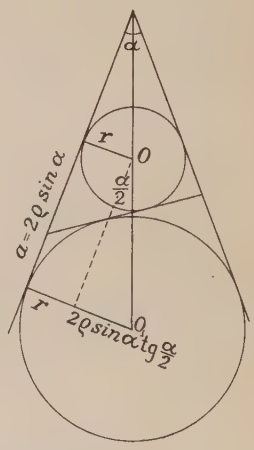
$$= p \cdot r\cot\frac{\alpha}{2} \cdot r\cot\frac{\beta}{2} \cdot r\cot\frac{\gamma}{2},$$

$$\because\ rp = r^2 \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2} .$$

Således $$\varrho = \frac{8\varrho^3 \cdot \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{4r^2 \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}}$$

$$= \frac{16\varrho^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}{r^2}$$

och $$\frac{r}{\varrho} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} .$$



Det gäller då att finna max. för detta uttryck.

Sättes då $$z = \sin x \sin y \cos(x+y)$$

så fås $$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y\,[\cos x \cos(x+y) - \sin x \sin(x+y)] =$$

$$= \sin y \cos(2x+y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sin x\,[\cos y \cos(x+y) - \sin y \sin(x+y)] =$$

$$= \sin x \cos(2y+x) .$$

Om dessa båda sättas $=0$, så fås $x=y=\frac{\pi}{6}$.

Att här ett absolut maximum föreligger är lätt insett.

Vi få således $\frac{r}{\varrho}\ \max=\frac{1}{2}$.

Ur alla tre bevisen framgår att $\max=\frac{1}{2}$ blott antages för den liksidiga triangeln.

Löst av *X.*, *Iter*, *B—g* och *C. P.*

171. *Visa, att om α är en spetsig vinkel, så är*

$$\cos\alpha \sin^2 \alpha/_2 \leqq \tfrac{1}{8}$$

I. För en godtycklig vinkel är

$$0 \leqq (\cos\alpha - \tfrac{1}{2})^2 = \cos^2\alpha - \cos\alpha + \tfrac{1}{4}$$

$$\because\ \cos\alpha(1-\cos\alpha) \leqq \tfrac{1}{4}$$

eller

$$\cos\alpha \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} \leqq \frac{1}{8}.$$

II. Satsen kan även omedelbart fås ur den föregående, ty om α är vinkeln vid basen i en likbent triangel, så är

$$2r \leqq \varrho$$

$$\because\ b\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \leqq \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{b}{2\sin 2\alpha}$$

$$\because\ 2\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \leqq 1$$

$$8\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \leqq 1$$

eller

$$\cos\alpha \sin^2\frac{\alpha}{2} \leqq \frac{1}{8}.$$

Ur båda bevisen framgår att $\max=\frac{1}{8}$ antages för $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Löst av *X.*, *Iter*, *B—g* och *C. P.*

172. *Visa att* $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=-1$.

I. $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=$

$2(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=$

$=2\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x+2\cos^4 x-3\sin^4 x-3\cos^4 x=$

$=-(\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x)=-(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=-1$.

II. Deriveras vänstra membrum, så fås

$12(\sin^5 x\cos x-\cos^5 x\sin x-\sin^3 x\cos x+\cos^3 x\sin x)=$

$=12\sin x\cos x(\sin^4 x-\cos^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x)=$

$=12\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x-1)=0$.

Vänstra membrum är således konstant, och genom insättning t. ex. av $x=0$, fås att det blir $=-1$.

Löst av *X.*, *Iter*, *B—g* och *C. P.*

173. *För vilka hela*[1] *x-värden blir* x^2-30x *en jämn kvadrat?*

Sättes $x^2+30x=y^2$, så fås $(x+15)^2-y^2=125$

eller $(x+15+y)(x+15-y)=225$.

Men 225 kan uppdelas i faktorerna

$(\pm 1)\cdot(\pm 225)$, $(\pm 3)\cdot(\pm 75)$, $(\pm 5)\cdot(\pm 45)$, $(\pm 9)\cdot(\pm 25)$

eller $(\pm 15)\cdot(\pm 15)$,

där $+$ tydligen hör ihop med $+$ och $-$ med $-$.

Sättes då $x+y+15$ och $x-y+15$ lika med var sin av dessa faktorer, så fås $x=98, 24, 10, 2, 0, -128, -54, -40, -32, -30$.

Löst av *X.*, *Iter*, *B—g* och *C. P.*

174. *En cirkel har diametern* $AB=2r$. *Från A fälles en linje AS vinkelrät mot cirkelns plan och lika med AB. På periferin tages en punkt M. Visa, att tetraedern SABM begränsas av fyra rätvinkliga trianglar, och sök läget av den omskrivna sfärens medelpunkt.*

Att trianglarna *SAB* och *SAM* äro rätvinkliga vid *A* är omedelbart klart, likaså att $\triangle AMB$ är rätvinklig vid *M*.

[1] Ordet saknas i uppgiften, men torde lätt underförstås.

Men $AB \perp BM$ och $AS \perp BM$, således planet $ASM \perp BM$ och $SM \perp BM$. Om då en sfär lägges med SB till diameter, så måste den gå genom punkterna A och M och är således den omskrivna sfären. Detta oberoende av antagandet $AS = AB$. Göres emellertid detta antagande, blir den omskrivna sfärens radie $= r \cdot \sqrt{2}$.

Löst av *X.*, *Iter*, *B—g* och *C. P.*

Pytagoreiska tal.

Formeln för Pytagoreiska tal

$$a^2 - b^2,\ 4a^2b^2,\ a^2 + b^2$$

är ju välkänd. Emellertid är det, särskilt vid uppställning av problem, bekvämt att hava en del sådana uträknade. Vi intaga därför här en

Tabell över Pytagoreiska tal.

a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
4	3	5	72	65	97	168	95	193	240	161	289
12	5	13	20	99	101	28	195	197	68	285	293
8	15	17	60	91	109	84	187	205	136	273	305
24	7	25	112	15	113	156	133	205	224	207	305
20	21	29	44	117	125	140	171	221	312	25	313
12	35	37	88	105	137	220	21	221	308	75	317
40	9	41	24	143	145	60	221	229	36	323	325
28	45	53	144	17	145	208	105	233	204	253	325
60	11	61	140	51	149	120	209	241	288	275	337
16	63	65	132	85	157	32	255	257	180	299	349
56	33	65	120	119	169	96	247	265	272	225	353
48	55	73	52	165	173	264	23	265	76	357	365
36	77	85	180	19	181	260	69	269	364	27	365
84	13	85	104	153	185	252	115	277	252	275	373
80	39	89	176	57	185	160	231	281	152	345	377

a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
352	135	377	92	525	533	680	111	689	828	2058	53
340	189	389	308	435	533	528	451	697	232	825	857
228	325	397	420	341	541	672	185	697	504	703	865
40	399	401	184	513	545	260	651	701	816	287	865
120	391	409	544	33	545	660	259	709	348	805	877
420	29	421	532	165	557	364	627	725	800	369	881
304	297	425	276	493	565	644	333	725	60	899	901
416	87	425	396	403	565	108	725	733	780	451	901
408	145	433	520	231	569	216	713	745	464	777	905
84	437	445	48	575	577	624	407	745	616	663	905
396	203	445	368	465	593	468	595	757	756	533	925
280	351	449	240	551	601	760	39	761	924	43	925
168	425	457	612	35	613	600	481	769	920	129	929
380	261	461	608	105	617	748	195	773	912	215	937
360	319	481	336	527	625	56	783	785	580	741	941
480	31	481	100	621	629	736	273	785	420	851	949
44	483	485	460	429	629	168	775	793	900	301	949
476	93	485	200	609	641	432	665	793	728	615	953
132	475	493	572	315	653	572	557	797	124	957	965
—	—	—	300	589	661	280	759	809	884	387	965
468	155	493	552	385	673	700	429	821	248	945	977
336	377	505	52	675	677	540	629	829	696	697	985
456	217	505	156	667	685	840	41	841	864	473	985
220	459	509	684	37	685	116	837	845	372	925	997
440	279	521	400	561	689	836	123	845	—	—	—

H—m.

Rättelser till första häftet.

Sid. 26 rad 5—6 uppifr. står: reaktionaccelerationen, läs: reaktionsacceleration.

» 26 » 5 nerifr. står: $\frac{yy^1}{x}$, läs: $\frac{yy'}{x}$.

» 27 » 18—20 uppifr. borttagas punkttecknen.

» 29 » 2 uppifr. står: $\frac{r}{r_e}$, läs: $\frac{r_p}{r_e}$.

Något om elektronrörens verkningssätt och användning vid radiomottagning.

Av FOLKE ERICSSON.

Elektronrörens teori är ytterst komplicerad, och det antal olika slag av kopplingar, i vilka de användas endast inom radiotekniken, är mycket stort. För den, som börjar att arbeta med elektronrör, torde det fördenskull vara svårt att få en överskådlig uppfattning av rörens arbetssätt och lämplighet i de olika fall han önskar använda dem. Hela arbetet blir fördenskull ofta lagt »på känn». Det erhållna resultatet blir till följd därav ej alltid det önskade och det, som kan erhållas med befintliga resurser. Med denna uppsats göres ett försök att ge en kortare, sammanfattande framställning av de *vanligaste* av de problem, som man möter vid användandet av elektronrör inom radiomottagningstekniken. Mera invecklade resonemang ha avsiktligt undvikits. För att öka värdet av det genomgångna lämnas en del litteraturanvisningar till i regel lättlästa uppsatser i lätt tillgänglig svensk litteratur.

Till behandling upptagas endast *treelektrodrören*, enär dessa äro de inom radiotekniken så gott som uteslutande använda.

Grunddragen av rörens anordning och användning förutsättas vara bekanta. Här göras fördenskull endast en del kortfattade erinringar om dessa saker. I fig. 1 visas principanordningen av ett treelektrodrör. För överskådlighetens skull äro i denna och samtliga följande figurer alla regleringsmotstånd och andra för det principiella studiet onödiga anordningar uteslutna. I fig. 2 visas den vid mottagarrör vanligaste anordningen av de tre elektroderna.

Från katoden K (glödtråden) utstötas, då denna gives en tillräckligt hög temperatur, elektroner, vilka attraheras av anoden A. Styrkan av elektronströmmen från K till A bestämmes, förutom av temperaturen hos K och anodspänningen V_a mellan A och K, även av gallerspänningen V_g mellan G och K. Strömmen i anodkretsen $K—B—A—K$ antages gå, som pilarna i fig. 1 visa.

Ju högre katodens temperatur genom ökning av glödströmmen, I_k, väljes, ju starkare elektronström erhålles — inom vissa gränser — men desto kortare livslängd får röret. Glödtråden brinner, vid temperatur över den normala, sönder på mycket kort tid. Katoden gives fördenskull en ekonomisk temperatur, svarande mot lämpligaste kombina-

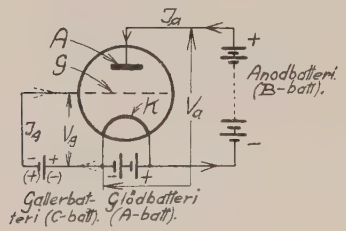


Fig. 1.

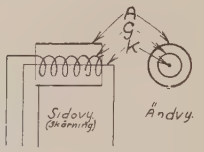


Fig. 2.

tion mellan anodström och livslängd. Vi skola i det följande hela tiden anta, att en dylik konstant temperatur hålles å katoden. Vi erhålla då med stöd av det nämnda

$$I_a = f(V_a, V_g), \ (I_k = \text{konst.}), \ . \ . \ . \ . \ (1\,a)$$

om vi med I_a beteckna strömmen i anodkretsen. Det visar sig, att för erhållandet av en viss variation i anodströmmen erfordras en mindre variation i gallerspänningen än i anodspänningen. På detta förhållande grundar sig elektronrörets användbarhet som förstärkare. (Gallret verkar som en ventil, vilken öppnas eller slutes genom att det gives en högre eller lägre potential. Ventilrör.)

Vid konstant anodspänning erhålles, inom vissa gränser, starkare anodström ju större positiv spänning gallret gives. Genom gallrets positiva spänning erhålles nämligen ett

elektriskt fält från detsamma, vilket samverkar med anodens elektriska fält till elektronernas framdrivande. På grund av gallrets gleshet uppfångar detta emellertid, vid vanliga rörkonstruktioner och vanligen använda spänningar, endast en ringa del av elektronströmmen. Detta gör, att de flesta elektronerna passera förbi gallret till anoden. Ökas gallrets spänning starkt kommer emellertid ett avsevärt antal elektroner att attraheras av detsamma och anodströmmen vanligen att minska. I gallerkretsen $K—C—G—K$ erhålles alltså vid positiv gallerspänning en ström. Gives gallret negativ spänning i förhållande till katoden motverkar det anodens inverkan på katoden och minskar på så sätt anodströmmen, trots att det negativt laddade gallret ej upptager elektroner.

Det principiella sambandet mellan gallerspänning och anodström samt mellan gallerspänning och gallerström, I_g, vid konstant anodspänning visas i fig. 3. Här och i det följande har som nollspänning antagits spänningen vid den ända av katoden, som är ansluten till minussidan av glödströmsbatteriet.

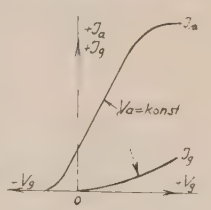


Fig. 3.

För så gott som alla rör karakteriseras anodströmskurvan av en rak eller nära rak del, vilket är av stor betydelse för rörets lämplighet som förstärkare.

Väljas andra anodspänningar än de, som i fig. 3 antagits, erhållas andra kurvor. I fig. 4 a visas sambandet mellan gallerspänning, anodspänning och anodström i ett koordinatsystem med tre axlar. Kurvorna I, II och III representera sambandet mellan V_g och I_a vid för varje kurva konstant anodspänning. Den svagaste anodströmmen erhålles vid den minsta anodspänningen. Denna kurva (I) ligger dessutom förskjuten mer åt gallrets positiva spänning än de övriga kurvorna. Ju högre anodspänningen är, desto starkare anodström erhålles och desto mer ligger anodströmskurvan förskjuten åt den negativa sidan av gallerspänningen. Det fullständiga sambandet mellan de tre studerade storheterna representeras av den yta, som går genom kulis-

sernas kanter. För denna yta gäller det anmärkningsvärda förhållandet, att vid de flesta rör en del av densamma — stycket *A—B—C—D* i fig. 4 —, åtminstone approximativt, är en plan yta.

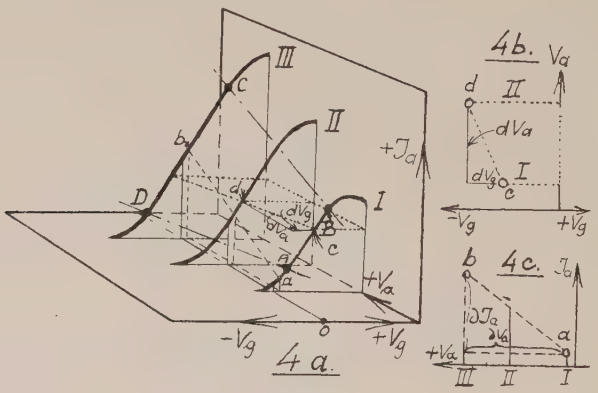


Fig. 4.

Enär en figur med tre axlar ej lämpar sig för numerisk framställning av förhållandena, uppritas de karakteristiska kurvorna vanligen i ett system med två axlar så, som visas i fig. 5.[1] Denna figur upptar samma kurvor som fig. 4 a, tänkta projicierade på I_a, V_g-planet. Den karakteristiska ytans planhet framgår i denna figur dels därav, att kurvorna ha en rak del och dels därav, att avstånden mellan de raka delarna å kurvorna äro proportionella mot anodspänningarna. Med kännedom om den anodspänning, varje kurva representerar, kan man med tillhjälp av fig. 5 grafiskt studera sambandet mellan de olika storheterna på mycket enkelt sätt.

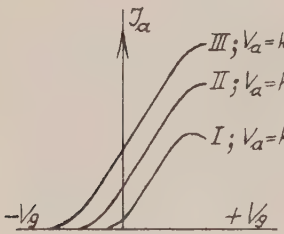


Fig. 5.

I praktiken söker man vanligen att få röret att arbeta å

[1] Med karakteristiska kurvor för elektronrören — (anod)karakteristikorna — avses i det följande $I_a = f(V_g)$ med V_a som en för varje kurva konstant parameter. I det följande användes för enkelhetens skull ordet »karakteristika» i ovanstående betydelse.

den del av rörkarakteristikorna, som är rak — å den plana delen av den karakteristiska ytan. Vi inskränka fördenskull vår framställning att i huvudsak gälla just detta område. *Funktionssambandet enligt ekvation* 1 a *kan för denna del skrivas*

$$I_a = k' + k''(V_a + \mu V_g), \quad \ldots \ldots \quad (1\,b)$$

där k' och k'' äro konstanter.

Då I_a är en funktion av de två variablerna V_a och V_g, gäller för den totala differentialen dI_a uttrycket

$$dI_a = \frac{\partial I_a}{\partial V_a} dV_a + \frac{\partial I_a}{\partial V_g} dV_g. \quad \ldots \ldots \quad (2\,a)$$

Enligt 1 b blir $\frac{\partial I_a}{\partial V_a} = k''$ och $\frac{\partial I_a}{\partial V_g} = k'' \cdot \mu$, varav fås

$$dI_a = k'' \cdot dV_a + k'' \mu \cdot dV_g \quad \ldots \ldots \quad (2\,b)$$

Antages I_a vara konstant, blir

$$\mu \cdot dV_g = - dV_a \quad \ldots \ldots \quad (3\,a)$$

eller

$$\mu = - \frac{dV_a}{dV_g} \quad \ldots \ldots \quad (3\,b)$$

Enär vi förutsatt, att I_a skall vara konstant, finna vi, att en variation i anodspänningen med dV_a kompenseras, i den mån vi studera anodströmmen, av en spänningsförändring å gallret i motsatt led av storleken dV_g. Spänningsvariationen å gallret, dV_g, omtransformeras av röret så, att den i anodkretsen verkar med storleken μdV_g. Faktorn μ är alltså ett mått på rörets spänningsförstärkningsförmåga. I svensk litteratur brukar *storheten* μ *kallas* omsättningstal, *förstärkningsfaktor* eller spänningsfaktor. Terminologien har ej stadgat sig. I det följande kommer benämningen förstärkningsfaktor att användas.

Hur förstärkningsfaktorn μ kan bestämmas med hjälp av ekvation 3 b framgår direkt av fig. 4 b, som föreställer en skärning av fig. 4 a med planet $I_a =$ konstant. Vid den brukliga plana framställningen av karakteristikan enligt fig. 5, avläser man grafiskt μ ur t. ex. fig. 6 för kurvornas

raka delar på så sätt, att dV_a blir ändringen i kurvparametern V_a:

$$dV_a = 100 - 50 = 50 \text{ volt}$$

och dV_g horisontella avståndet mellan kurvorna, tagna i samma ordning:

$$dV_g = -2 - (+4) = -6 \text{ volt}$$

varav

$$\mu = -\frac{50}{-6} = 8{,}33 .$$

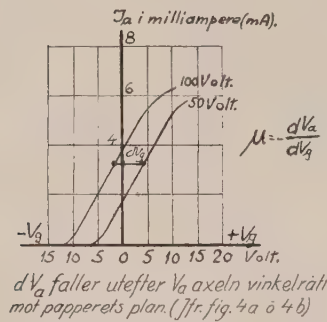


Fig. 6.

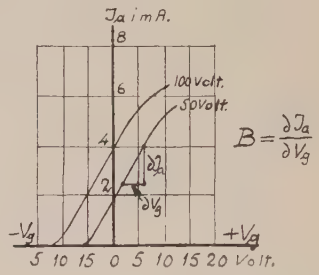


Fig. 7.

Storheten μ blir tydligen en konstant för den plana delen av rörets karakteristiska yta.

Vid angivandet av elektronrörens egenskaper lämnas ofta uppgift å karakteristikornas »*brantheť*», B. Brantheten definieras som förhållandet mellan en viss förändring i anodströmmen och den förändring i gallerspänningen, som erfordras för att ge denna anodströmsförändring vid konstant anodspänning. Alltså

$$B = \frac{\partial I_a}{\partial V_g}, \ (V_a = \text{konst.}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,\text{a})$$

Men enligt 1 b är då

$$B = k''\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,\text{b})$$

I fig. 7 visas, huru brantheten kan bestämmas på grafisk väg. Undersökningen avser samma rör som fig. 6. Numeriskt erhålles för den plana delen av ytan, där B är konstant,

$$B = \frac{4 - 2{,}5}{6{,}5 - 2} = 0{,}34 \ {}^{mA}/_{V}.$$

Vid studium av egenskaperna hos ett elektronrör behöver man även äga kännedom om dess *inre motstånd*, R_i, egentligen impedans. Vi definiera här motståndet som förhållandet mellan en viss förändring i anodspänningen och motsvarande förändring i anodströmmen vid konstant gallerspänning. Sålunda

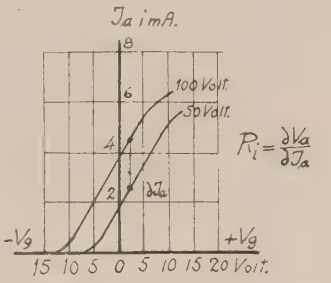
$$R_i = \frac{\partial V_a}{\partial I_a}, \ (V_g = \text{konst.}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\text{ a})$$

och enligt 1 b

$$R_i = \frac{1}{k''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\text{ b})$$

I fig. 8 visas den grafiska bestämningen av R_i för samma rör, som förut studerats i fig. 6 och 7. Vi erhålla för detta rör inom det studerade området

$$R_i = \frac{100 - 50}{0{,}002} = 25\,000 \ \Omega.$$



∂V_g faller utefter V_a-axeln vinkelrätt mot papperets plan. (Jfr. fig 4a o 4c).

Fig. 8.

R_i kan uppfattas som ett ohmskt motstånd.

Insättes värdet å k'' enligt ekvation 5 b i ekvation 4 b erhålles följande relation mellan de tre studerade storheterna:

$$B = \frac{\mu}{R_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Vi finna alltså, att, om två av de tre studerade storheterna äro bestämda, så är också den tredje bestämd. För det här studerade röret erhålles sålunda såsom exempel och kontroll

$$B = \frac{8{,}33}{25\,000} = 0{,}000\,33 \ {}^{A}/_{V}.$$

Enär en av de tre storheterna alltid kan bestämmas med tillhjälp av de båda andra, innebär det en överbestämning att bestämma eller angiva alla tre. Man måste emellertid, på grund av deras förekomst i litteraturen, vara förtrogen med alla tre storheterna. (I kataloger över elektronrör angivas ofta endast en av de tre storheterna. Ett dylikt angivande är tydligen värdelöst. Vi återkomma till detta i det följande.)

(Ofta skrives rörekvationen under följande form:

$$I_a = k' + k''' (DV_a + V_g) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\ c)$$

Storheten D kallas i tysk litteratur Durchgriff.

Vi erhålla i analogi med ekv. 2 b

$$dI_a = k''' D \cdot dV_a + k''' \cdot dV_g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\ c)$$

Om I_a är konstant, blir

$$D = -\frac{dV_g}{dV_a} = \frac{1}{\mu} \text{ (se ekvation 3 b).}$$

Om D insättes i stället för μ i ekvation 6, få vi

$$B = \frac{1}{D \cdot R_i}$$

eller

$$B \cdot D \cdot R_i = 1 \text{ (Barkhausens formel).}$$

Vidare är

$$\frac{\partial I_a}{\partial V_a} = k''' D = k'' = \frac{1}{R_i}$$

och

$$\frac{\partial I_a}{\partial V_g} = k''' = k'' \cdot \mu = B.)$$

För att få en inblick i rörets sätt att arbeta tänka vi oss, att i rörets anodkrets finnes inkopplat ett yttre motstånd R_y. Anodströmmen ger i detta motstånd en spänningsfallsvariation $R_y \cdot dI_a$, då den ändras med dI_a. Ökas strömmen så ökas spänningsfallet. Därvid sjunker spänningen å röret (se fig. 9). Vi kunna alltså skriva att spänningsvariationen vid anoden (i punkt a) blir

$$dV_a = -R_y \cdot dI_a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\ a)$$

Men enligt ekv. 2 b och 5 b kan dI_a skrivas

$$dI_a = \frac{1}{R_i} (dV_a + \mu dV_g),$$

varav erhålles

$$dV_a = R_i dI_a - \mu dV_g.$$

Insättes detta i spänningsfallsekvationen 7 a, erhålles

$$R_i \cdot dI_a - \mu dV_g = -R_y \cdot dI_a,$$

varav

$$dI_a = \frac{\mu \cdot dV_g}{R_i + R_y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,b)$$

Röret verkar sålunda på sätt och vis som en transformator med omsättningstalet μ. Men till skillnad mot förhållandet i en transformator har man vid elektronröret, som senare skall visas, svårt att göra hela »sekundärspänningen», $\mu \cdot dV_g$, åtkomlig.

Vi skola nu studera, vilka anordningar, som böra vidtagas, och huru storheterna μ, R_i och B böra vara beskaffade, för att bästa resultat skall erhållas, *då röret arbetar som förstärkare.* Därvid skola vi behandla *förstärkning av talfrekvens* — tonfrekvens, lågfrekvens — för sig och *förstärkning av radiofrekvens* — högfrekvens — för sig.

Vi ha att särskilja *tvenne huvudtyper av lågfrekvensförstärkning.* Förstärkarröret kan nämligen arbeta antingen å ett efterföljande rör eller å en hörtelefon. Villkoren för god förstärkning bli olika i de båda fallen. Arbetar förstärkarröret å ett efterföljande rör, skall man utföra sin koppling så, att största möjliga spänningsvariationer erhållas å det efterföljande rörets galler. Arbetar förstärkarröret däremot som sista rör, till vilket en telefon är kopplad, strävar man att utföra anordningen så, att största möjliga energivariationer erhållas i den tillkopplade telefonen. I det första fallet ha vi alltså *spänningsförstärkning*, i det senare ha vi s. k. »*kraftförstärkning*».

Spänningsförstärkning vid lågfrekvens kan i huvudsak anordnas på tre olika sätt, nämligen med *motståndskoppling*, med *drosselkoppling* och med *transformatorkoppling.*

I fig. 9 visas tvenne rör, sammankopplade med *motståndskoppling.* Från ett föregående rör inkommer växelspänning till första rörets galler. Variationerna i gallerspänning å första röret föranleda variationer i rörets anodström

(ekv. 7 b) och alltså spänningsfallsvariationer i motståndet R_y. Enär anodbatteriet, *B*-batt, lämnar konstant spänning, komma spänningsvariationer att uppträda vid första rörets anod. Dessa spänningsvariationer tillföras via gallerkondensatorn C_g gallret i andra röret. Kondensatorn C_g behöves för att hindra anodbatteriets likriktade spänning tillträde till andra rörets galler. Härigenom förhindras, att detta erhåller hög positiv spänning, vilken skulle sätta röret ur funktion. Gallermotståndet R_g — gallerläckan — inkopplas, för att man skall kunna ge gallret lämplig vilospänning och för att gallrets blockerande genom uppmagasinering av elektroner, varigenom det skulle erhålla stor negativ potential, skall förhindras. Gallerbatteriet, *C*-batt, användes

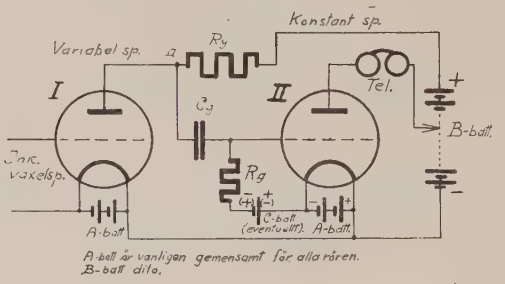


Fig. 9.

stundom, för att negativ vilospänning skall erhållas å gallret. Lämpliga storleksordningar å de ingående delarna äro givetvis i hög grad beroende på de använda rören. Följande data ge ett begrepp om, vilka värden det på ett ungefär är frågan om vid koppling till vanliga mottagarrör: R_y=50 000 à 100 000 ohm; C_g=0,01 à 0,1 mikrofarad och mer; *B*-batt 100 à 200 volt; R_g=0,1 à 1 megohm — mindre ju starkare signaler —; *C*-batt 0 à 10 volt med negativa polen mot gallret och *A*-batt beroende på rörtyp 1,1 à 3 (à 6) volt.

Vi ha redan i det föregående erhållit följande ekvation till anordningen i fig. 9:

$$dV_a = -R_y \cdot dI_a .$$

Insättes värdet å dI_a från 7 b, erhålles

$$dV_a = -\frac{R_y \cdot \mu \cdot dV_g}{R_y + R_i}.$$

Av det föregående erhålles förstärkningen av spänningen (obs.! dV_a tillföres andra rörets galler)

$$F_1 = \frac{dV_a}{dV_g} = -\frac{R_y}{R_y + R_i} \cdot \mu = -\frac{\mu}{1 + \frac{R_i}{R_y}} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Minustecknet visar, att spänningsvariationerna vid första rörets anod, d. v. s. även vid andra rörets galler, äro 180° fasförskjutna mot variationerna i spänning å första rörets galler. När spänningen stiger å första rörets galler sjunker den å det andra rörets galler och omvänt. Ekvationen visar, att R_y måste vara stort i förhållande till R_i för att god förstärkning av spänningen skall erhållas. Hela förstärkningsfaktorn tillgodogöres ej förrän R_y väljes oändligt stort. Väljes R_y stort, erhålles emellertid, på grund av likströmmen i anodkretsen, ett stort spänningsfall i motståndet R_y. För att tillräcklig anodspänning skall erhållas å röret, måste fördenskull anodbatteri med hög spänning användas. I nedanstående tabell klargöras förhållandena något med siffror. Tabellen gäller för ett rör med ett inre motstånd av R_i lika med 40 000 ohm. Observera att förstärkningen är oberoende av frekvensen.

R_i ohm	R_y ohm	F_1	Spänningsfall i volt per mA anodström
40 000	20 000	0,33 μ	20
40 000	40 000	0,50 μ	40
40 000	80 000	0,67 μ	80
40 000	120 000	0,75 μ	120

För att litet spänningsfall skall erhållas på grund av likströmmen i anodkretsen, bör denna likström göras så svag som möjligt utan att anordningens goda funktio-

nerande riskeras. Anodströmmen göres svag genom att gallret ges en lämplig, vanligen något negativ, vilospänning så vald, att röret arbetar å nedre delen av karakteristikan. Härvid måste man emellertid tillse, att man ej kommer för nära karakteristikans nedre krök (se fig. 3—8). Ligger vilospänningen för nära kröken riskerar man nämligen att växelspänningen, vilken verkar å gallret med vilospänningen som medelspänning, kommer att med sina negativa toppvärden falla under kröken. Härigenom förvanskas anodströmmens kurvform. Den blir ej, i motsats till vad fallet är, då man arbetar å kurvans raka del, likformig med gallerspänningskurvan. Men om kurvformen förvanskas, så förvanskas det ljud, som erhålles från mottagaren. S. k. distortion inträder. I fig. 10 åskådliggöres ett dylikt fall med distortion. Växelströmskurvan för anodkretsen har i det visade fallet blivit tillplattad underifrån. Om däremot gallerspänningsvariationerna varit så små, att de helt befunnit sig under den raka delen av karakteristikan, t. ex. om de varierat mellan b_1 och b_{11}, hade ingen distorsion inträtt. Ehuru storleken av den konstanta anodströmmen ej inverkar på förstärkningen (se ekv. 8), kan man sålunda ej tillåta en alltför stor sänkning av densamma. Vid vanliga rör i motståndskoppling torde man böra räkna med en minsta anodlikström av cirka 1 milliampère. För att ej behöva en alltför hög spänning och sålunda dyrbart anodbatteri väljes vanligen R_y ej över 75 000 à 100 000 ohm. (Strängt taget förlöper förstärkningsförloppet vid en motståndskoppling ej fullt så, som visas i fig. 10. Då anodströmmen ändras, så ändras även spänningen å anoden och man kommer in på en annan karaktäristika. Man arbetar på ett plan, ej utefter en kurva. Ett närmare studium av dessa förhållanden skulle emellertid här föra för långt.)

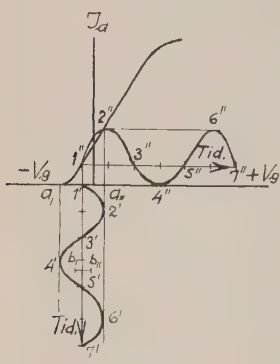


Fig. 10.

Det vid *drosselkopplingen* (chokekopplingen) använda principschemat visas i fig. 11. Den enda skillnaden mellan denna koppling och den i fig. 9 visade motståndskopplingen är den, att motståndet R_y i fig. 9 har ersatts med ett induktivt motstånd L_d, R_y. Liksom vid motståndskopplingen erhållas här spänningsfallsvariationer i den yttre delen av anodkretsen, varigenom spänningsvariationer erhållas vid första rörets anod (i punkt a).

Talströmmarna äro periodiska funktioner av mycket komplicerad form. En dylik periodisk funktion kan anses vara sammansatt av ett antal rena sinuskurvor med olika periodtal och amplitud. Vi inskränka oss i det följande i första hand till att studera den förstärkning, som en av dessa svängningar, godtyckligt vilken, erhåller vid drosselkopplingen. I våra ekvationer är R_y, om vi studera *ett* periodtal, att betrakta som impedans. Vid studiet av sinusfunktioner av visst periodtal kan man räkna som om man hade endast ohmska motstånd, om i räkningarna som representant för impedanserna införas de komplexa motstånden för kretsarna. I det här studerade fallet erhålles sålunda, om vi beteckna funktionssambandet med F_{v_2} (jfr ekv. 8),

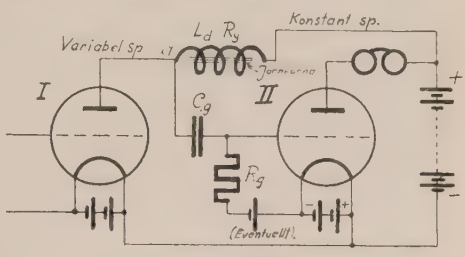


Fig. 11.

$$\frac{dV_a}{dV_g} = F_{v_2} = -\frac{(R_y + j\omega L_d)\cdot\mu}{R_i + R_y + j\omega L_d},$$

enär det komplexa motståndet för en självinduktionsspole med ohmskt motstånd vid vinkelfrekv. ω är $(R + j\omega L)$. Här betecknar j den imaginära enheten. För studium av de amplituder, som erhållas, kunna vi skriva, om vi beteckna amplituden med F_2,

$$F = \frac{\sqrt{R_y^2 + \omega^2 L_d^2}\cdot\mu}{\sqrt{(R_i + R_y)^2 + \omega^2 L_d^2}}.$$

Här är vanligen R_y ganska litet i förhållande till R_i och till ωL_d, vilket gör att vi kunna sätta förstärkningen

$$F_2 = \sim \frac{\mu}{\sqrt{\frac{R_i^2}{\omega^2 L_d^2} + 1}} \quad \ldots\ldots (9)$$

Vi se av ekvation 9 att, då ωL_d göres stort i förhållande till R_i, närmar sig uttrycket i nämnaren 1 och förstärkningen närmar sig μ. Det största spänningsförstärkningsresultat, som kan erhållas, är alltså detsamma som vid motståndskopplingen. Enär det ohmska motståndet i självinduktionsspolen — drosseln — kan hållas relativt lågt — ett eller annat tusental ohm —, erhålles vid drosselkopplingen, i motsats till förhållandena vid motståndskopplingen, endast ett obetydligt spänningsfall i yttre delen av anodkretsen på grund av den likström, som flyter i densamma. På grund därav utnyttjas praktiskt taget hela anodbatteriets spänning som spänning å röret. Man kan alltså välja anodbatteri med lägre spänning vid drosselkopplingen än vid motståndskopplingen.

För att erhålla ett ungefärligt begrepp om det värde, som erfordras å drosselspolens självinduktion, anta vi, att vid normal talfrekvens en impedans på 100 000 ohm önskas. Som lämpligt periodtal, ν, att representera normal talfrekvens brukar man välja ungefär 800 perioder per sekund. Därvid erhålles en vinkelfrekvens ($\omega = 2\pi \cdot \nu$) lika med 5 000. För bestämning av L_d erhålles alltså, om R_y försummas,

$$Z_d = \omega L_d = 5\,000 \cdot L_d = 100\,000,$$

varav

$$L_d = 20 \text{ henry}.$$

För de olika frekvenser, varav talströmmen kan anses vara sammansatt, erhålles olika förstärkning. Detta synes av ekvation 9. I denna ekvation ingår nämligen vinkelhastigheten ω. Man har att räkna med periodtal från 20 à 30 per sekund upp till cirka 10 000. I nedanstående tabell visas för ett specialfall huru frekvensvariationerna inverka

på förstärkningen. För beräkning av tabellen har antagits R_i lika med 40 000 ohm och L_d lika med 20 henry.

ν perioder/sek.	ω $2 \cdot \pi \cdot$ perioder/sek.	L_d henry	ωL_d ohm	R_i ohm	F_2
100	628	20	12 560	40 000	$\sim 0{,}30\ \mu$
~ 400	2 500	20	50 000	40 000	$\sim 0{,}78\ \mu$
~ 800	5 000	20	100 000	40 000	$\sim 0{,}93\ \mu$
5 000	31 400	20	628 000	40 000	$\sim 1{,}00\ \mu$

Den i ovanstående exempel använda självinduktionen torde, som synes av variationen å F_2, få anses vara väl liten. Önskvärt värde å självinduktionen är 50 à 100 henry för att förstärkningen skall bli tillnärmelsevis lika för alla periodtal, så att distortion undvikes. Detta är emellertid mycket höga värden. De erhållas, för att ange exempel, ej å spolarna i en hörtelefon eller s. k. lågfrekvenstransformator för radio av vanligt slag. En överslagsräkning visar, att 20 000 à 30 000 lindningsvarv erfordras, om drosseln förses med järnkärna, som har ett par cm^2 sektionsarea.

(För beräkning av L har man

$$L = \frac{N^2 \cdot \mu_p \cdot a \cdot 0{,}4\pi}{l} \cdot 10^{-8} \text{ henry; mått i cm; } \mu_p = \sim 100 \text{ à } 200.)$$

I verkligheten äro förhållandena vid drosselkoppling mer komplicerade än här angivits. Enär drosselkopplingen funnit ganska liten användning, torde det ej vara skäl att utförligare ingå på studiet av densamma. Vid studiet av transformatorkopplingen vidröras emellertid en del förhållanden, som även ha sin tillämpning å drosselkopplingen.

Drosselkopplingens egenskap att förstärka de högre frekvenserna mer än de lägre, åtminstone om spolen är utförd så, att kapaciteten mellan varven är liten, är ej alltid att betrakta som en nackdel. De lägre frekvenserna i ett rundradioprogram tendera ofta att bli för starka, enär de högre

frekvenserna ofta bli proportionsvis starkt försvagade, t. ex. på grund av kapaciteten mellan de ledare — överföringslinjer —, som strömmen passerar. Genom att vid drosselkoppling de högre frekvenserna förstärkas mer än de lägre, kan den på grund av linjekapaciteten försämrade klangfärgen i ljudet förbättras.

Vid *transformatorkopplingen* användes det principschema, som visas i fig. 12. Vi anse här till att börja med, att ingen sekundär strömbelastning uppträder i transformatorn. Under denna förutsättning verkar primärspolen, $N_1 L_1$, på samma sätt som drosselspolen vid drosselkoppling. Spänningsfallsvariationer (egentligen inducerade spänningar) uppstå sålunda i spolen på grund av dess självinduktion, då anodströmmen varierar. (Vi försumma spolens ohmska motstånd.) Spänningsvariationerna på grund av självinduktion visa emellertid att även storleken av det magnetiska fältet i spolen varierar. På grund av fältvariationerna induceras spänningar även i sekundärspolen, N_2. Per lindningsvarv induceras samma spänning å primär- och sekundärsidan. Om varvtalet N_2 är större än varvtalet N_1, erhålles sålunda en större spänningsvariation i sekundärspolen än i primärspolen. Vi benämna förhållandet mellan varvtalen i sekundär- och primärspole transformatorns omsättningstal, z, och erhålla sålunda

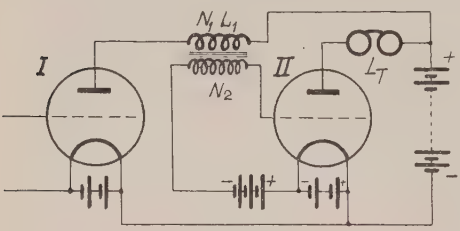


Fig. 12.

$$z = \frac{N_2}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Enär spänningsvariationerna i primärspolen följa samma lag som spänningsvariationerna i den förut studerade drosselspolen erhålles här spänningsförstärkningen från galler till galler

$$F_3 = \sim \frac{z \cdot \mu}{\sqrt{\frac{R_i^2}{\omega^2 L_1^2} + 1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Vi erhålla alltså enligt ekvation 11 en z gånger så stor förstärkning, som vid användandet av drosselkoppling eller med denna ur förstärkningssynpunkt likvärdig motståndskoppling. Förstärkningen kan tydligen bli större än förstärkningsfaktorn. Omsättningstalet z väljes vanligen å transformatorer för telefonimottagning till 3 à 5.

Förhållandena i transformatorn äro emellertid långt mer komplicerade, än vad ovanstående överslagsberäkningar visa. Mellan lindningsvarven i transformatorn finnes alltid en viss kapacitet. Undersökningar visa, att på grund av denna kapacitet de vanliga transformatorerna ge olika förstärkning för olika periodtal. Mycket förenklat kunna vi anse, att primärsidan av transformatorn består av en självinduktionsspole och en kapacitet, som äro parallellkopplade (fig. 13). Försummas vid överslagsberäkningar spolens ohmska motstånd erhålles i denna anordning vektorn för impedansen

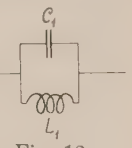


Fig. 13.

$$Z_{3_\nu} = \frac{j\omega L_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{\omega L_1}{\omega C_1 \left(j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_1} \right)}$$

med amplituden

$$Z_3 = \frac{\omega L_1}{\omega C_1 \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right)} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Om ωL_1 lika med $\frac{1}{\omega C_1}$ (resonans), vilket inträffar för periodtalet $\nu_r = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L_1 \cdot C_1}}$, blir impedansen i primärkretsen, d. v. s. yttre impedansen i första rörets anodkrets, lika med oändligheten. Av det föregående torde omedelbart framgå, att förstärkningen då blir $z \cdot \mu$. Vid såväl högre som lägre

periodtal än resonansperiodtalet blir impedansen mindre, varigenom även sämre förstärkning erhålles. På grund därav erhålles distortion. Denna blir vid vanliga radiotransformatorer mången gång synnerligen störande, enär vid många av dem resonansperiodtalet ligger inom den viktigaste delen av hörbarhetsområdet. Genom parallellkoppling av en kapacitet till transformatorn kan resonansperiodtalet minskas, varigenom resonansen i vissa fall kan fås att bli mindre störande. Undersökningar visa nämligen, att vid många vanliga radiotransformatortyper de lägre periodtalen på grund av väl liten självinduktion i primärlindningen bli för litet förstärkta. Flyttas genom parallellkoppling av en kapacitet resonanspunkten mot lägre periodtal förbättras förstärkningen för dessa. Samtidigt försämras emellertid förstärkningen för de högre periodtalen. För att denna försämring ej skall bli för stor får kapaciteten ej göras för stor. En lämplig storleksordning å kapaciteten vid parallellkoppling å primärsidan torde vara 0,001 mikrofarad.

Det ohmska motståndet i transformatorn motverkar stegringen av impedansen vid resonans. På liknande sätt verka förluster i transformatorns järn och sekundära belastningsströmmar. Den dämpning, som på så sätt erhålles, är, ehuru den förminskar förstärkningen, sålunda av godo, om den ej drives för långt. Man erhåller genom dämpningen en jämnare förstärkning för alla periodtal, än om dämpningen ej funnes. Drives dämpningen för långt, t. ex. genom att för stor sekundär belastningsström tillåtes uppträda, riskerar man, att ringa eller ingen förstärkning erhålles. För stor dämpning genom för stor sekundär belastningsström torde i regel erhållas, om man tillåter att gallerströmmar uppträda i det matade röret. Det är fördenskull av vikt, att genom transformatorkoppling matade rör ha tillräckligt stor del av karakteristikans raka område (vid starka signaler motsvarande ungefär 5 milliampères variation) belägen över den negativa gallerspänningen i diagrammet. Detta leder emellertid av konstruktiva skäl till,

att lägre förstärkningsfaktor erhålles, än om rören utföras så, att karakteristikan helt erhålles vid positiv gallerspänning, vilket utan nämnvärd olägenhet tyckes kunna tillåtas vid motstånds- och drosselkoppling. Stundom ger man emellertid, särskilt om anordningen vill råka i självsvängning — om den vill tjuta på grund av lågfrekvent återkoppling — transformatorerna en liten, sekundär belastningsström. En dylik belastningsström av lämplig storlek erhålles vanligen, om man kopplar ett motstånd av storleksordningen 10^5 ohm parallellt med sekundärlindningen.

Transformatorkopplingen har alltså sina mycket stora svagheter och många erfarna radioamatörer använda sig numera ej av densamma. I stället användes motståndskoppling. Det anses, att samma förstärkning erhålles med tre stegs motståndskoppling som med två stegs transformatorkoppling — tre respektive två seriekopplade rör. Vid motståndskopplingen erhålles därvid emellertid bättre ljudkvalitet än vid transformatorkopplingen. Vid endast ett stegs förstärkning arbetar dock transformatorkopplingen vanligen fullt tillfredsställande.

Vi skola nu något antyda, huru ett kraftförstärkarrör skall vara beskaffat, för att man skall erhålla bästa möjliga resultat med detsamma. Vi sträva vid *kraftförstärkningen* att erhålla största möjliga effektutveckling i den tillkopplade yttre kretsen, om denna består av ett ohmskt motstånd, eller största möjliga energiförflyttningar till och från den yttre kretsen, om i denna är inkopplad en självinduktion — telefon —, då till rörets galler lägges en given växelspänning.

Det kan visas, att den utvecklade effekten (energien) är lika med summan av de effekter, som utvecklas från var och en av de skilda sinusformade svängningar, av vilka telefonströmmen kan anses bestå. Vi kunna fördenskull inskränka våra undersökningar att gälla en enkel sinussvängning och erhålla trots detta en uppfattning av förloppet, sådant det i verkligheten gestaltar sig.

Med stöd av ekvation 7 erhålles följande värde å effektivvärdet av anodströmmen, enär vi endast undersöka det område, där μ är konstant,

$$I_{a\,\mathrm{eff}} = \frac{\mu \cdot V_{g\,\mathrm{eff}}}{R_i + R_y},$$

om vi med $V_{g\,\mathrm{eff}}$ mena effektivvärdet av den spänning, som inkommer till rörets galler. Sålunda erhålles effekten

$$P_y = I^2_{a\,\mathrm{eff}} \cdot R_y = \frac{\mu^2 \cdot V^2_{g\,\mathrm{eff}} \cdot R_y}{(R_i + R_y)^2}.$$

Här är effekten att betrakta som funktion av motståndet R_y. Vi söka villkoret för att denna funktion skall bli maximum och bestämma maximivärdet. Deriveras och sättes första derivatan lika med noll, erhålles villkoret

$$R_y = R_i.$$

Andra derivatan blir negativ. Ett maximum erhålles alltså, då det yttre motståndet göres lika med det inre motståndet i röret. Maximivärdet å effekten blir

$$P_{\max} = \frac{\mu^2 \cdot V^2_{g\,\mathrm{eff}} \cdot R_i}{(R_i + R_i)^2} = \frac{\mu^2 \cdot V^2_{g\,\mathrm{eff}}}{4R_i} \quad . \quad . \quad . \quad (13\,\mathrm{a})$$

Vi övergå nu att undersöka, huru förhållandena gestalta sig, om den yttre impedansen i stället för ett ohmskt motstånd utgöres av en självinduktion, t. ex. lindningarna i en telefon (L_T i fig. 12). Energiförbrukningen i en självinduktion är i medeltal noll, om man räknar över ett antal hela perioder. Då strömmen genom en självinduktionsspole stiger tillföres spolen emellertid energi. Denna energi uppmagasineras i spolen i form av elektromagnetisk energi — det magnetiska fältet växer. Avtar strömmen återföres energien till den matande strömkällan och det magnetiska fältets styrka avtar. Då en växelström passerar en spole med självinduktion, kommer alltså en energikvantitet att svänga mellan strömkällan och spolen med medelvärdet räknat över en hel period lika med noll. För att största möjliga magnetfält skall erhållas i spolen — för att alltså

telefonen skall ge starkast möjliga ljud — skall man ordna så, att den svängande energikvantiteten blir maximum. Den svängande energikvantiteten är vid sinusformad ström

$$A = \tfrac{1}{2} L I_{max}^2 = L I_{eff}^2 .$$

Ekvation 7, tillämpad på det här föreliggande fallet, varvid R_y betraktas som impedans, kan, om spolens ohmska motstånd försummas, med tillhjälp av symboliska metoden skrivas

$$I_a = \frac{\mu \cdot V_g}{R_i + j\omega L_T} .$$

Här representera I_a och V_g vektorerna för respektive anodström och gallerspänning. Härav erhållas amplitudvärdena angivna med effektivvärden

$$I_{a\,eff} = \frac{\mu \cdot V_{g\,eff}}{\sqrt{R_i^2 + \omega^2 L_T^2}} .$$

Den svängande energien blir sålunda

$$A = \frac{\mu^2 \cdot V_{g\,eff}^2 \cdot L_T}{R_i^2 + \omega^2 L_T^2} .$$

Här är A att betrakta som funktion av L. En undersökning av maximivärdet visar, att detta erhålles då

$$\omega L_T = R_i .$$

(Obs.! Här inverkar periodtalet på villkoret för maximivärdets erhållande.) Insättes detta värde i energiekvationen erhålles

$$A_{max} = \frac{\mu^2 \cdot V_{g\,eff}^2 \cdot L_T}{2 R_i^2} .$$

Detta kan, enär för att maximum skall erhållas vid ett visst periodtal L_T är lika med en konstant gånger R_i, skrivas

$$A_{max} = \frac{\mu^2 \cdot V_{g\,eff}^2}{k_1 \cdot R_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13\ b)$$

där k_1 är en konstant.

Ekvationerna 13 a och 13 b visa att effekt- resp. energiförstärkningen är proportionell mot $V_{g\,eff}^2$. En effekt- resp.

energiförstärkning prop. mot F^2 erhålles sålunda. I praktiken torde man kunna räkna med en »kraftförstärkning» på 25 eller vid synnerligen gynnsamma förhållanden på 50 gånger per rör (se ekv. 8, 9 och 11).

Av ekvationerna 13 a och 13 b framgår, att bästa resultat erhålles med det rör som sista rör i en koppling, vilket har största värde å faktorn $\frac{\mu^2}{R_i}$, om villkoret, att yttre och inre impedans i anodkretsen skola vara lika, iakttagits. Faktorn $\frac{\mu^2}{R_i}$ är alltså ett mått på *rörets godhet som kraftförstärkare.*

En del svårigheter yppa sig vid konstruerandet av rör med högt värde å denna faktor, om samtidigt villkoret beträffande impedanserna skall uppfyllas. Konstrueras nämligen röret med stort värde å μ erhålles samtidigt stort värde å R_i. Men om R_i är stort, visar det sig vara svårt, att göra den yttre impedansen i anodkretsen lika stor som det inre motståndet. Av ekonomiska skäl kunna nämligen de vanliga telefonerna ej göras med alltför stor impedans. Impedansen i en telefon på grund av självinduktion torde för de viktigaste svängningarna i det inkommande ljudet kunna sättas till 5 à 10 gånger telefonens ohmska motstånd. Vid vanliga telefoner för radioändamål, alltså telefoner med cirka 2 000 ohms motstånd, erhålles sålunda impedanser på 10 000 à 20 000 ohm. (Obs.! Impedansen på grund av självinduktion, reaktansen, ej det ohmska motståndet, är ur elektrisk synpunkt bestämmande för telefonens användbarhet.) Inre motståndet i det matande röret bör alltså ej vara mer än 10 000 à 20 000 ohm. Strävar konstruktören av röret att förlägga karakteristikan över gallerspänningens negativa sida (se transformatorkopplingsstudiet), ökas, som vi redan i det föregående sett, svårigheterna. Vid vanliga mottagarrör för kraftförstärkning med lämpligt inre motstånd torde $\frac{\mu^2}{R_i}$ i regel ligga mellan $2 \cdot 10^{-3}$ och $4 \cdot 10^{-3}$. För det i fig. 6—8 studerade röret erhålles

$$\frac{\mu^2}{R_i} = \frac{8{,}3\,3^2}{25\,000} = \sim 2{,}7\,5 \cdot 10^{-3}.$$

(Med stöd av det som nämnts om annat skrivsätt av rörekvationen, än det här använda, kunna vi skriva rörets godhet

$$\frac{\mu^2}{R_i} = \frac{1}{D^2 \cdot R_i} = \frac{B}{D}.$$

Rörets godhet anges ofta, enligt Barkhausen, som $\frac{B}{D}$.)

Vid ett mottagarrör för starka signaler måste man tillse, att *karakteristikans raka del är tillräckligt stor.* För ett rör, som är kopplat till en medelstor högtalare, bör man räkna med en rak del av kurvan, omfattande en strömamplitud av storhetsordningen 5 à 10 *mA*. Denna raka del bör, särskilt om röret är matat med en transformator, för att distortion ej skall uppträda på grund av gallerströmmar, ligga å den del av diagrammet, som motsvarar negativ gallerspänning. Fordringarna på storlek å den raka delen av kurvan för rör, som skola arbeta med svaga signaler, bli givetvis mycket mindre. Emellertid bör den raka delen ej vara för liten, enär det då blir svårt att injustera den riktiga vilospänningen. En rak del av karakteristikan med ungefär 1 *mA*:s amplitud är ett vanligt värde för rör, avsedda för svaga signaler.

Vi skola nu övergå till att något studera de vanligaste anordningarna för *förstärkning av de inkommande radiosvängningarna.* De problem, som därvid möta oss, äro i grund och botten desamma, som vi behandlat i samband med lågfrekvensförstärkningen. På grund av det höga periodtalet (vid 300 meters våglängd 10^6 perioder per sekund $\nu = \frac{v}{\lambda}$, ν periodtal, v = ljusets fortplantningshastighet = $3 \cdot 10^8$ m/sek och λ våglängd), kompliceras emellertid problemet. En förenkling inträder dock genom att endast en frekvens skall förstärkas. Genom tal och musik modulerade svängningar omfatta visserligen strängt taget en hel grupp bredvid varandra liggande periodtal, men skillnaden mellan den högsta och den lägsta i gruppen ingående frekvensen

är, då ej långa vågor användas, liten i förhållande till »bärvågens» periodtal. (Storhetsordningar $10^6 \pm 10^4$, d. v. s. ± 1 %.) Man kan fördenskull räkna, som om man arbetade med endast bärvågens periodtal. Här bör dock påpekas att, om man gör sin apparat alltför selektiv, d. v. s. ger den mycket skarp avstämningsförmåga, så försämras ljudkvaliteten genom att ej hela gruppen av vågor mottagas lika väl av apparaten.

Vid *högfrekvensförstärkning* kunna vi, liksom vid lågfrekvensförstärkning, uppdela de vanligen använda kopplingarna i tre huvudtyper, nämligen *motståndskoppling*, *koppling med avstämd anodkrets* och *transformatorkoppling*.

Vid *motståndskopplingen* för högfrekvensförstärkning kopplas på samma sätt som vid motståndskoppling för lågfrekvensförstärkning (fig. 9). Gallerkondensatorn C_g göres dock vid högfrekvensförstärkning endast av storleksordningen 300 à 500 $\mu\mu F$[1]. Gallerläckan R_g väljes vanligen till 1 à 2 megohm. Anordningens principiella verkningssätt blir alldeles detsamma som vid lågfrekvensförstärkning. Vid korta vågor, under cirka 1 000 m, d. v. s. vid höga periodtal, visar sig emellertid motståndskopplingen vara ineffektiv. Motståndet R_g är nämligen parallellkopplat med en strömbana via gallerkondensatorn C_g och kapaciteten mellan det andra rörets galler och anod. Den nämnda rörkapaciteten brukar vara av storleksordningen 10^{-5} mikrofarad. Enär rörkapaciteten är liten i förhållande till gallerkondensatorns kapacitet blir den förra kapaciteten praktiskt taget ensam bestämmande för strömbanans impedans. Vid högre periodtal blir denna impedans liten i förhållande till motståndet R_g. Den resulterande yttre impedansen i första rörets anodkrets blir på så sätt liten och spänningsförstärkningen F_1 (ekvation 8) blir obetydlig eller ingen.[2] För rörkapaciteten lika med 10 $\mu\mu F$ och periodtalet 10^6 (våglängd 300 meter) erhålles impedansen

[1] $1 \mu\mu F = 10^{-6} \mu F$ (mikrofarad) $= 10^{-12} F$ (farad) $= 0{,}9$ cm.

[2] Obs.! R_g kan i ekvation 8 uppfattas som yttre impedans. Jfr härledningen av ekvation 9.

$$Z_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-12}} = \sim 16\,000 \text{ ohm.}$$

En undersökning visar, att om första rörets inre motstånd är t. ex. cirka 40 000 ohm, blir den resulterande yttre impedansen cirka 15 500 ohm och förstärkningen ungefär 0,25 μ.

Kopplingen vid användandet av *avstämd anodkrets* (rejektorkoppling) visas i fig. 14. Kopplingen med avstämd anod motsvarar närmast drosselkopplingen vid lågfrekvensförstärkning. Drosselspolen har ersatts med en avstämningsanordning, bestående av en spole, L_a, R_y — utan järn — och en variabel kondensator C_a. Variabel självinduktion, s. k. variometer, kan givetvis även användas. Kondensatorn brukar för rundradiovåglängder, 250 à 500 m, göras av storleksordningen 300 à 500 $\mu\mu F$. Den erforderliga självinduktionen blir då av storhetsordningen 0,1 millihenry, mH. Detta synes av resonansvillkoret för svängningskretsen, $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ (ekvation 12), vilket kan skrivas (se sid. 17 och sid. 23)

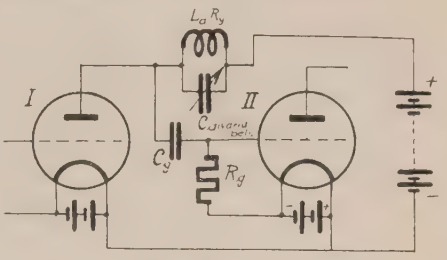


Fig. 14.

$$\lambda_m = 60\pi \sqrt{\frac{L_{mH} \cdot C_{\mu\mu F}}{10}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Den teoretiska undersökningen av spänningsförstärkningen blir i princip densamma, som förut gjorts vid undersökningen av drosselkopplingen (ekvation 9), ehuru här hänsyn behöver tagas även till kapaciteten i yttre kretsen. De förhållanden, som uppträda i svängningskretsen L_a, C_a, ha något studerats i samband med transformatorkopplingen vid lågfrekvensförstärkning (ekvation 12). Om motståndet i spolen försummas, erhålles sålunda vid svängningskretsens

avstämning till samma periodtal som den inkommande vågen, att impedansen för dennas periodtal blir oändligt stor, varigenom spänningsförstärkningen μ erhålles. Spolens motstånd nedsätter emellertid impedansen vid resonans, dock i vanliga fall ej mer, än att anordningen arbetar bra. Approximativt kan man sätta, att impedansen vid resonans, med användande av enheterna henry, farad och ohm, är

$$Z_r = \sim \frac{L_a}{C_a \cdot R_y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Antages att man med en spole, som har L_a lika med $0{,}15$ *mH* och R_y — ohmska motståndet vid högfrekvent växelström — lika med 1 ohm, vill avstämma för 400 meters våglängd, erhålles med tillhjälp av ekvation 14, att kondensatorn skall ha en kapacitet

$$C_a = \frac{400^2 \cdot 10}{60^2 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}15} = 300 \mu\mu F = (270 \text{ cm}).$$

Enligt ekvation 15 erhålles därvid impedansen vid resonans

$$Z_r = \frac{0{,}15 \cdot 10^{-3}}{300 \cdot 10^{-12} \cdot 1} = 0{,}5 \cdot 10^6 \text{ ohm},$$

som är ett väl användbart värde.

Ekvation 15 visar även, vilket är värt att observera, att impedansen blir större ju större värde å självinduktionen och ju mindre värde å kapaciteten som väljes. Den avstämda anoden ger alltså större förstärkning ju större spole och ju mindre kapacitet man väljer för avstämning till en viss våglängd. (På grund av spolens egensvängning, den har en viss kapacitet mellan varven, kan den ej väljas hur stor som helst.)

Kopplingen med avstämd anodkrets arbetar i motsats till motståndskopplingen mycket bra även vid rundradiovåglängderna. Kapaciteten mellan galler och anod i andra röret, vilken fördärvar motståndskopplingens funktionerande vid korta våglängder, kommer nämligen vid användandet av koppling med avstämd anod att ingå som en del av

avstämningskondensatorn, enär den är parallellkopplad med densamma.

Rör med avstämd anodkrets råka lätt i *självsvängning*, om gallerkrets och anodkrets äro avstämda till samma periodtal, vilket vid mottagning blir fallet. De båda svängningskretsarna äro nämligen kopplade till varandra med den impedans, som finnes mellan rörets glödtråd och galler med tilledningar. Man erhåller en »återkoppling» från anodkretsen till gallerkretsen. I fig. 15 visas huru svängningskretsarna äro kopplade. Från antennen inkommande svängningar påverka från gallerkretsen via gallret anodkretsen. Svängningarna i anodens avstämningskrets, L_a, C_a, återverka via den gemensamma impedansen Z_{kg} å gallerkretsen och dess svängningskrets, L_{at}, C_{at}, så att nya svängningar erhållas i denna. Dessa i sin tur påverka ånyo anodkretsen och »röret svänger».

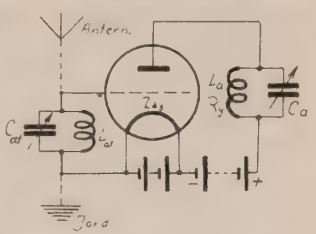


Fig. 15.

Återkopplingen innebär, att via den gemensamma impedansen energi överföres från anodkretsen till gallerkretsen. Denna energi levereras av anodbatteriet. Om energikvantiteten, som överföres från anodkretsen till gallerkretsen, förmår att täcka förlusterna i gallerkretsen och antennkretsen, d. v. s. förmår att upphäva dämpningen i dessa kretsar, svänger röret. Alla radioamatörer veta, att detta i en mottagare för telefoni på grund av de störningar, som därvid uppträda — kanariefåglar —, med alla medel måste undvikas. Om den energikvantitet, som överföres, ej är tillräcklig att täcka alla förluster i galler- och antennkrets, är återkopplingen av godo. Dämpningen i dessa kretsar blir då minskad och de utifrån kommande impulserna påverka apparaten kraftigare, än om ingen återkoppling funnes. Bästa resultat erhålles, om återkopplingen är så stor, att apparaten står strax under svängningsgränsen.

Ju större den yttre impedansen i anodkretsen är, vilket betyder ju större L_a och ju mindre C_a och R_y (se ekvation 15), desto större blir spänningsvariationerna och på grund därav även återkopplingen. Likaledes blir återkopplingen större, ju större den gemensamma impedansen Z_{kg} är. Om återkopplingen blir för stor och man ej har tillfälle att minska densamma genom val av mindre spole och större kapacitet, kan sidoavstämning användas, d. v. s. man inställer ej svängningskretsen i anodkretsen på full resonans med den inkommande svängningen. På grund av tendensen till självsvängning finner man, att man vid kortare våglängder, t. ex. rundradiovåglängderna, vanligen ej kan arbeta med mer än högst två seriekopplade rör med avstämda anodkretsar. Ofta yppa sig t. o. m. svårigheter att undvika självsvängning redan då ett förstärkarrör med avstämd anodkrets användes.

Enär faran för självsvängning är mindre vid de längre vågorna (lägre periodtalen) anordnas stundom i praktiken vid högfrekvensförstärkning först med en periodtalsomformning till lägre periodtal, varefter förstärkning vidtages. Därvid kan ofta med fördel motståndskoppling användas. Man erhåller en s. k. superheterodynanordning. Kopplingar för upphävandet av tendensen till självsvängning, s. k. neutrodynkopplingar, finnas även. Dessa kopplingar kunna här ej upptagas till behandling. Vid mycket korta våglängder visar sig anordningen med avstämd anodkrets, liksom alla andra metoder för högfrekvensförstärkning, vara olämplig.

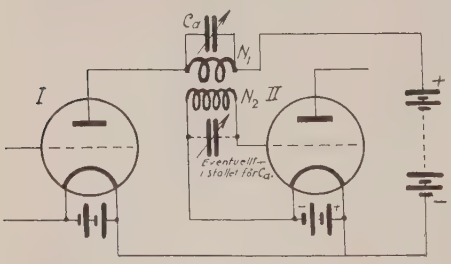


Fig. 16.

Som en variant till kopplingen med avstämd anodkrets kan man betrakta den koppling, där i stället för den avstämda anoden användes en å primär- eller sekundärsidan *avstämd transformator* (fig. 16). Genom att man väljer

varvtalet N_2 större än varvtalet N_1, söker man att, liksom vid transformatorkopplingen för lågfrekvensförstärkning, erhålla en spänningsförstärkning, som är större än förstärkningsfaktorn. Vinsten med anordningen, jämförd med den avstämda anoden, tyckes emellertid ej vara synnerligen stor, sannolikt beroende på den ökning av förlusterna, som inträder genom insättandet av sekundärspolen.

Transformatorkoppling med oavstämd, vanligen aperiodisk,[1] *transformator*, vilken närmast motsvarar transformatorkopplingen vid lågfrekvensförstärkning, visas i fig. 17. Anordningens teori blir i stort sett densamma som teorien för transformatorkoppling vid lågfrekvens. Anordningen lider, liksom motsvarande koppling vid lågfrekvens, av det felet, att kapaciteten mellan varven verkar störande på förstärkningen. Kapaciteten mellan varven verkar här som en mer eller mindre kraftig kortslutning av transformatorn. (Jfr motståndskoppling vid högfrekvensförstärkning.) För rundradiovåglängder torde den i fig. 17 visade anordningen med i handeln tillgängliga transformatorer få anses vara fullständigt ineffektiv. Detta får anses vara fallet även efter inkoppling av kondensatorn C_g, vars anslutning vanligen rekommenderas. Genom kondensatorn ändras kopplingen till ett slags drosselkoppling, där primärsidan av transformatorn användes som drosselspole och sekundärsidan tjänstgör som gallerläcka.

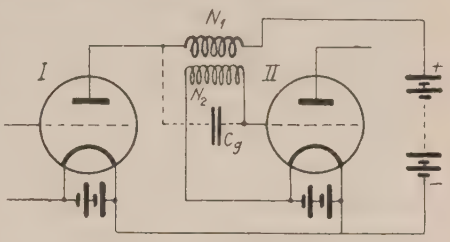


Fig. 17.

Av det här om högfrekvensförstärkning nämnda torde framgå, att av de enkla förstärkarkopplingarna för högfrekvens endast de, som arbeta efter principen med avstämd anodkrets, äro lämpliga för kortare våglängder. Införandet av en extra avstämningskrets försvårar emellertid mot-

[1] En krets blir aperiodisk då $R^2 > \frac{4L}{C}$.

tagarens skötsel. Enär det därtill visar sig svårt att per rör erhålla lika stor förstärkning med högfrekvensförstärkning som med lågfrekvensförstärkning, användes lågfrekvensförstärkning mest.

Endast vid apparater för långdistansmottagning är högfrekvensmottagning behövlig. I dylika apparater för rundradioändamål har högfrekvensförstärkning även allmänt kommit till användning. Svagare inkommande impulser förmå nämligen ej påverka detektorn i en apparat. Detta leder till att ljudet vid långdistansmottagning förvanskas. Genom högfrekvensförstärkning förbättras alltså vid långdistansmottagning ljudkvaliteten samtidigt som räckvidden ökas. Man kan säga, att *högfrekvensförstärkning ökar räckvidden* under det att *lågfrekvensförstärkning ökar ljudstyrkan.*

Här nedan skall nu något behandlas elektronrörets verkan som detektor. *Den vanligen använda detektorkopplingen* visas i fig. 18. (Jfr kopplingen av andra röret i fig. 14.) Spolen L_{at} och kondensatorn C_{at} tillsammans med antennen bilda avstämningskretsen för mottagarens inställning på viss våglängd. Kondensatorn kopplas ofta, speciellt vid korta våglängder, i serie med spolen och antennen, varigenom resulterande kapaciteten i avstämningskretsen på grund av de seriekopplade kapaciteterna i kondensator och antenn minskas. Angående studiet av lämplig storlek å L_{at} och C_{at} hänvisas till studiet av förstärkning med avstämd anodkrets. Gallerkondensatorn C_g skall under mottagningen genom uppladdning ge gallret ändrad spänning. Den får därför, samtidigt som den ej får vara för liten för framsläppandet av högfrekvensströmmen, ej heller vara för stor, enär då stora elektricitetsmängder behövas för att ladda densamma så, att önskade spänningsvariationer erhållas $\left(V = \frac{Q}{C}\right)$. Den

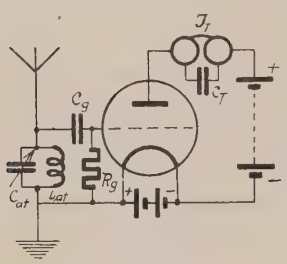


Fig. 18.

göres vanligen av storhetsordningen 200 à 400 $\mu\mu F$. Gallerläckan R_g göres 1 à 4 megohm. Telefonkondensatorn, C_T, vars huvudsakliga ändamål är att ge en passage för högfrekvensströmmarna förbi telefonen, göres av storleksordningen 1 000 à 2 000 $\mu\mu F$. (Kondensatorn avstämmer även telefonen. Jfr avstämning av lågfrekvenstransformatorn.)

Detektorns verkningssätt torde kunna förklaras på följande sätt: Då inga impulser inkomma till röret erhålles å dess galler en vilospänning, som bestämmes av storleken av gallerläckan, spänningen vid dennas mot katoden vända ända (vanligen glödbatteriets plusspänning) och rörets gallerströmskurva (se fig. 3). Jämviktsläget karakteriseras därav, att strömmen i gallerläckan är lika med den ström, som vid den förhandenvarande gallerspänningen flyter från galler till glödtråd.

Inkomma nu högfrekventa svängningar med, som vi för enkelhetens skull till att börja med anta, konstant periodtal och konstant amplitud, ge sig svängningarna tillkänna å gallret i form av spänningsvariationer. Under spänningsvariationernas positiva halvperiod — räknat vid gallret — kommer en ökning av gallerströmmen att erhållas, under den negativa halvperioden kommer en minskning av gallerströmmen att inträda. Enär gallerströmskurvan är krökt uppåt, blir ökningen av gallerströmmen under en positiv halvperiod i genomsnitt större än minskningen under en negativ. Olika stora elektricitetsmängder förflyttas alltså under de båda halvperioderna. Ur elektronteoretisk synpunkt betyder detta, att här en större mängd elektroner tillföras gallret än som bortföras från detsamma. (Obs.! Elektronerna gå i motsatt led mot den sedan gammalt antagna strömriktningen.) Gallret erhåller alltså en negativ uppladdning på grund av de inkommande svängningarna. En begränsning av uppladdningen erhålles genom ökad ström i gallerläckan, då spänningen vid gallret sjunker.

Anta vi, att en serie av impulser inkommer med varje impuls bestående av ett antal högfrekventa svängningar

(t. ex. en signal från en tonande telegrafstation med 500 impulser per sekund), erhålles från varje impuls i serien, förutom en grupp högfrekventa spänningsvariationer å gallret, även en lågfrekvent spänningsförändring. För hela serien av impulser erhållas serier av högfrekventa spänningsvariationer och en serie lågfrekventa spänningsvariationer. Mot gallerspänningsvariationerna svarande variationer i anodströmmen erhållas. (Man bör arbeta med gallerspänningar, som ligga under anodkarakteristikans raka del.) De högfrekventa variationerna uppfattas ej i hörtelefonen, dels emedan de representera en ej hörbar ton, dels emedan membranet ej kan svänga med deras höga periodtal och dels emedan telefonkondensatorn verkar som en mer eller mindre kraftig kortslutning av telefonspolarna för de höga periodtal, det här är frågan om. De lågfrekventa variationerna åter ge en ton i telefonen. Fig. 19 antyder svängningsförhållandena.

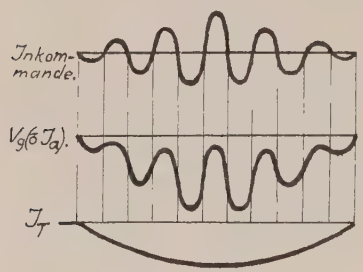


Fig. 19.

Den lågfrekventa uppladdningen av gallret är till sin storlek beroende på de inkommande högfrekvenssvängningarnas amplitud, vilket utan vidare torde inses. Inkommer sålunda en t. ex. genom tal modulerad kontinuerlig högfrekvenssvängning, d. v. s. en svängning med varierande amplituder (och något varierande våglängd), kommer på grund därav gallrets laddning och alltså dess medelspänning att variera med modulationen. Härigenom möjliggöres uppfattning av talet i telefonen. Inkommer en omodulerad kontinuerlig svängning reagerar telefonen ej. Vid telegrafi med kontinuerliga svängningar måste alltså modulation åstadkommas på ett eller annat sätt. Denna modulation åstadkommes numera vanligen så, att telegrafimottagaren, genom lämplig koppling (återkoppling, se det följande och studiet av den avstämda anoden), bringas i självsvängning med ett periodtal, som något av-

viker från den inkommande svängningens periodtal (heterodynmottagning). De båda svängningarna ge då en interferenston, som är hörbar i telefonen. Tonhöjden kan ändras genom ändring av mottagarens egensvängningstal. Telegrafitecknen erhållas genom sändningens utförande i intervaller, motsvarande dessa tecken. När endast den egna apparaten svänger, höres ingen interferenston. Det är den här omnämnda interferenstonen, som ger de vid telefonimottagning ytterst obehagliga interferenstjuten, vilka redan i det föregående omnämnts.

Gallerkarakteristikans form är sådan, att medelspänningsförändringarna å gallret ej bli proportionella mot modulationen. De starkare moduleringarna (de starkare ljuden) åstadkomma vanligen proportionsvis större spänningsförändringar än de svagare. För mycket svaga impulser reagerar detektorn ej alls, enär vid små variationer laddningarna bli praktiskt taget lika för de båda halvperioderna på grund av formen å gallerströmskurvans krökning.

Ett detektorrör, kopplat enligt fig. 18, kan anses arbeta dels som detektor, ehuru som en dålig sådan, och dels som en lågfrekvensförstärkare. Genom rörets detektorverkan erhålles den lågfrekventa förändringen av gallerspänningen. Denna lågfrekventa förändring av gallerspänningen förstärkes av röret så, som vid en vanlig lågfrekvensförstärkare. Användes återkoppling erhålles nyttig förstärkning även av de högfrekventa svängningarna.

Med tanke på detektorrörets förstärkarverkan, är det vanligen lämpligast att till detektorrör välja ett rör med stor förstärkningsfaktor. Kopplas en hörtelefon omedelbart efter röret, bör man tillse, att $\frac{\mu^2}{R_i}$ ej blir för litet och att R_i ej blir för stort.

Detektorverkan kan även erhållas *med den koppling, som visas i fig. 20*, om gallret gives en sådan vilospänning, att denna ligger under anodkarakteristikans nedre (eller övre) krök. Ligger gallrets vilospänning under nedre kröken, åstadkommer sänkning av gallerspänningen endast en obe-

tydlig sänkning av anodströmmen, under det att ökning av gallerspänningen åstadkommer en relativt stark ökning av anodströmmen. Detektorförloppet i ett dylikt fall torde inses med stöd av fig. 10, om de där visade svängningarna tänkas vara högfrekventa. För varje särskild modulation i de inkommande svängningarna, erhålles ett särskilt medelvärde å anodströmmen, större ju kraftigare svängningarna äro. Anodströmmens medelvärde kommer alltså att variera i takt med den lågfrekventa moduleringen av de högfrekventa svängningarna. I fig. 21 visas förloppet för en halv period av den lågfrekventa moduleringen.

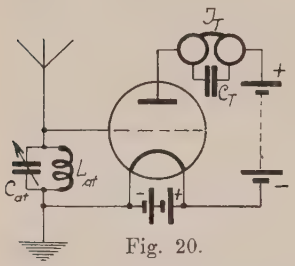


Fig. 20.

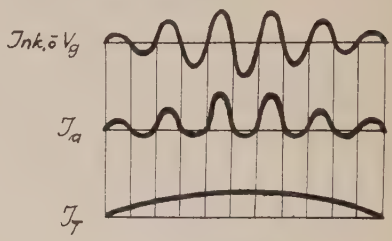


Fig. 21.

Detektorns verkan som likriktare (jfr kristalldetektorn) framträder tydligare vid den senast behandlade detektorkopplingen än vid den först behandlade. Den nu behandlade detektorkopplingen, vid vilken detektorverkan och verkan som lågfrekvensförstärkare sammanslagits, anses i vanliga fall ge något sämre resultat än den först behandlade, men den anses å andra sidan vara den bättre för mycket starka impulser.[1] Detektorkoppling med gallerkondensator måste tydligen tillgripas, om före detektorn finnes ett högfrekvensförstärkarrör, som är kopplat till detektorröret med motståndskoppling eller koppling med avstämd anod, enär då gallerkondensatorn erfordras för att hindra anodbatteriets spänning tillträde till gallret.

Med några ord skola vi nu helt kortfattat beröra den s. k. *återkopplingen* utöver det, som nämnts om denna i

[1] Vid av förf. gjorda mottagningsförsök med de båda kopplingarna har ingen väsentlig skillnad kunnat observeras.

samband med högfrekvensförstärkning med avstämd anodkrets. Vi tänka oss, att en impuls inkommer till gallret i ett rör. Denna impuls föranleder en förändring i anodströmmen. Om spänningsfall på grund av denna förändring i anodströmmen i sin tur genom lämplig koppling kunna fås att leda till en ny impuls på gallret, samverkande med den första impulsen, kan man få röret att arbeta som generator, i det att kontinuerliga svängningar erhållas i rörets kretsar. Till bestämmande av frekvensen måste i någon av rörkretsarna (anod- eller gallerkretsen) finnas inlänkad en svängningskrets, på vanligt sätt bestående av självinduktion och en kapacitet. Det kan nu visas, att ett villkor för att självsvängning skall inträda är, att den del av spänningsfallet i svängningskretsen, som inverkar på spänningen mellan glödtråd och galler, skall ligga ungefär 180° fasförskjutet i förhållande till anodströmmen.

Denna fasvinkel kan ej åstadkommas i ett steg, enär den största fasförskjutning, som därvid kan erhållas mellan spänning och ström, är 90°. Genom lämpligt kombinerande av den fasförskjutning, som erhålles i ett induktivt motstånd eller i en kapacitet med den fasförskjutning, som erhålles i svängningskretsen, kan den önskade 180°-fasförskjutningen erhållas i tvenne steg.

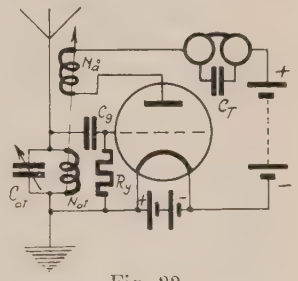


Fig. 22.

I fig. 22 visas schemat för den vid radiomottagare mest använda återkopplingsanordningen. Fasförskjutningen erhålles här dels genom den ömsesidiga induktionen mellan spolarna $N_å$ och N_{at} och dels på grund av förhållandena i svängningskretsen. Graden av återkoppling regleras genom att den ömsesidiga induktionen mellan spolarna $N_å$ och N_{at} varieras. Detta sker genom att avståndet mellan spolarna justeras. Härigenom ändras den från anodkretsen till gallerkretsen till minskande av dämpningen överförda energikvantiteten.

I fig. 23 visas den anordning av återkopplingen, som användes i den s. k. Reinartzmottagaren, vilken visat sig vara särskilt lämplig för mottagning av mycket korta vågor.

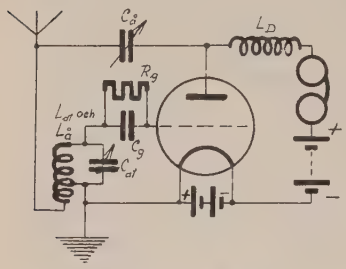


Fig. 23.

Anodströmkretsen är här delad i tvenne parallella grenar. Den ena, i vilken anodbatteriet är inkopplat, är avsedd för likströmmen och lågfrekvensen, och den andra, i vilken återkopplingskondensatorn $C_{å}$ är inlänkad, är avsedd för högfrekvensen. Spolen L_D hindrar högfrekvensen att passera genom batterigrenen. Kondensatorn $C_{å}$, som endast är på några tiotal $\mu\mu F$, hindrar likströmmen och lågfrekvensen att passera i den gren, där den är inlänkad. Genom variation av kondensatorns kapacitet varieras strömstyrkan i den krets, där den är inkopplad. Därigenom erhålles variation i återkopplingsgraden. Fasförskjutningen åstadkommes på sätt analogt med det, som visas i fig. 22. Kopplingen i fig. 23 arbetar med oavstämd antenn.

I det föregående ha vi sett, att vid samtliga förstärkarkopplingar stort värde å förstärkningsfaktorn är önskvärt. På grund av konstruktiva egenskaper hos rören leder detta emellertid till, att inre motståndet blir stort, samt att karakteristikorna förskjutas mot positiv gallerspänning. Stort inre motstånd leder till att impedanserna i anodkretsen behöva göras stora, för att god verkan skall erhållas från röret. Detta är dock, som vi sett, ur kostnadssynpunkt ogynnsamt. Förskjutningen av anodkarakteristikorna i positiv led för med sig erhållandet av gallerström, vilket särskilt vid transformatorkoppling är olämpligt. Fördelar och nackdelar måste vid val av rör noga undersökas för varje särskilt användningssätt. Vanligen torde valet utfalla på ungefär följande sätt:

Som första rör i en motståndskoppling väljas rör med stor förstärkningsfaktor. Man tillåter vanligen stort inre

motstånd, i det att man arbetar med hög anodspänning. Karakteristikan å det matade röret brukar tillåtas ligga å sidan för positiv gallerspänning.

Vid drosselkoppling och koppling med avstämd anodkrets väljer man även med fördel rör med stor förstärkningsfaktor, trots att därvid inre motståndet blir stort och trots att man därvid får rör, som arbeta å positiva sidan av gallerspänningen. Stor yttre impedans kan nämligen erhållas.

Vid transformatorkoppling väljer man, för att undvika distortion på grund av gallerströmmar, det matade röret med karakteristikan så, att den har tillräckligt stor del å negativa sidan av gallerspänningen. Därvid erhålles lågt värde å förstärkningsfaktorn, vilket man får finna sig uti.

Vid val av kraftförstärkarrör ser man vanligen till, att man får rör med relativt litet inre motstånd och så stort värde som möjligt å $\frac{\mu^2}{R_i}$. Röret bör dessutom ha stor rak del av karakteristikan å negativa sidan av gallerspänningen (om det är matat av en transformator).

Vid val av detektorrör utses vanligen rör med stor förstärkningsfaktor, för att detektorns förstärkaregenskaper må komma till sin fulla rätt. Man bör även tillse, att röret har sådana egenskaper, att det passar till den koppling, som finnes efter detsamma.

Av lågfrekvenskopplingarna torde transformatorkopplingen vara vanligast, enär den anses ge bättre förstärkning än de övriga kopplingarna. Motståndskopplingen ger dock renare ljud. Motståndskopplingen förstärker, enär man vid den kan välja rör med stor förstärkningsfaktor ej avsevärt sämre per rör än transformatorkopplingen.

Bland kopplingarna för högfrekvensförstärkning är kopplingen med avstämd anodkrets (neutraliserad mot självsvängning av röret eller ej) vanligast. För större våglängder kan med fördel motståndskoppling användas. Vid mycket korta vågor lönar det sig i regel ej att använda högfrekvensförstärkning. För rundradiovåglängder användes stundom

högfrekvensförstärkare med periodtalsomformning (superheterodynmottagare).

Lågfrekvensförstärkning användes för att öka ljudstyrkan. Högfrekvensförstärkning användes för att öka räckvidden.

Vid val av rör spela ur teknisk och ekonomisk synpunkt, förutom de hittills behandlade rörstorheterna, *en hel del andra egenskaper in*, såsom inköpspris, glödströmseffekt, livslängd, erforderlig anodspänning, mikrofoneffekt och fabrikatets jämnhet.

Med ett par ord skall här, med tanke på en del av dessa storheter, nämnas något om de tvenne huvudgrupper av rör, som i dagligt tal benämnas *högtemperaturrör* och *lågtemperaturrör*. Vid högtemperaturrör består glödtråden av wolfram, vilken, för att tillräcklig elektronemission skall erhållas, måste upphettas till vitglödgning. Härtill åtgår vid de vanliga mottagarrören relativt stor effekt, vanligen 1,5 à 3 watt. Lågtemperaturrör, vid vilka glödtråden är bestruken med ett salt (oftast ett toriumsalt), som ger tillfredsställande elektronemission vid relativt låg temperatur, behöva däremot vanligen en effekt av endast 0,10 à 0,25 watt.

Kostnaderna för glödströmmen, vilken vanligen tages från ackumulatorer, äro sålunda mycket lägre vid lågtemperaturrören än vid högtemperaturrören. En stor besparing i direkt driftskostnad göres alltså genom val av lågtemperaturrör. Denna besparing motverkas till en del av lågtemperaturrörens högre pris, men en överslagsräkning visar, att det större priset mer än väl motväges av de lägre driftskostnaderna. Inställningen av glödströmmen är ej så kritisk vid lågtemperaturrören som vid högtemperaturrören. Vid högtemperaturrören avtar elektronemissionen mycket hastigt, om man underskrider den riktiga glödströmstyrkan. Vid lågtemperaturrören är gränsen ej utpräglad. Spänningssänkning å ackumulatorn gör sig fördenskull mindre gällande vid användandet av lågtemperaturrör än vid användandet av högtemperaturrör. Driftstekniskt sett torde båda rörtyperna i stort sett få anses vara likvärdiga.

Inga rörtyper fara väl av att överbelastas. Man bör så-

lunda ej mata glödtråden med större strömstyrka än den, som angives såsom rörets normala. Vanligen erfordras för erhållandet av denna strömstyrka en något lägre spänning än den å röret angivna. En del av spänningen är avsedd för spänningsreglering, då ackumulatorns spänning sjunker. Överbelastas ett högtemperaturrör, brinner det snart sönder, och överbelastas ett lågtemperaturrörs glödtråd, fördärvas rörets goda egenskaper, även om glödtråden ej brinner av. Vid användandet av lågtemperaturrör måste man även tillse, att ej högre anodspänning användes än den, som är angiven som den högsta för rören tillåtna. Rören ta skada, om de erhålla för hög anodspänning. Vid högtemperaturrör tyckes högre anodspänning, än den å rören angivna, saklöst kunna komma till användning.

Litteraturanvisningar.

1. S. Lemoine, Principiell framställning av användning av glödkatodrör vid mottagning inom radiotelegrafien. Teknisk tidskrift 1920, avd. Elektroteknik, häfte 1 och 2.
2. E. Velander, Bidrag till triodoscillatorns teori. Teknisk tidskrift 1922, häfte 27 och 36.
3. G. Holmström, Några ord om radiotelegrafi och radiotelefoni. Teknisk tidskrift 1923, allmänna avd., häfte 20 och 22.
4. E. Malmgren, Radioteknikens grunder. Radio 1923 och 1924.
5. A. Lenning, Elektronröret som förstärkare. Radioamatören 1924, häfte 4.
6. Lågfrekvensförstärkningens problem. Radiobladet 1924, häfte 19, 20 och 21.
7. Lågfrekvensförstärkares anordning och injustering. Radioamatören 1924, häfte 1.
8. F. Fransson, Om lågfrekvensförstärkning. Radioamatören 1924, häfte 7.
9. A. Lenning, Avstämning av lågfrekvenstransformatorn. Radioamatören 1925, häfte 1.
10. A. Lenning, Om högfrekvensförstärkning. Radioamatören 1924, häfte 2.
11. Detektorn och gallerläckans betydelse. Radiobladet 1924, häfte 21.
12. Detektorfrågan än en gång. Radiobladet 1924, häfte 23 och 24.
13. Några mätningar å lågtemperaturrör. Radio 1924, häfte 10, 12, 13, 15 och 18.
14. Hur bör ett gott förstärkarrör vara beskaffat? Radioamatören 1925, häfte 3.
15. Modulerade svängningar. Radioamatören 1925, häfte 4.

Vattenångans maximitryck.

Av ERNST FOGHAMMAR.

I professor Mebius »Fysiska laborationer för gymnasiet» föreslås ett försök vid bestämning av vattenångans tryck, som rent teoretiskt är idealiskt. När det gäller att förfärdiga apparaten, är det emellertid mindre lyckligt att följa de anvisningar, som där finnas.

Man bör taga ett minst 7 mm tjockt glasrör, som rengöres och *torkas* omsorgsfullt. Längden kan vara från c:a 3 dm till över 1 m. Ju längre det tages, för dess större temperaturintervall kunna mätningarna företagas. Härefter tillsmältes det i ena ändan och böjes vid *BC*, så som fig. 1 visar. Nu fylles stycket *ABC* av röret med kvicksilver, varefter böjningen vid *D* företages. Därefter fylles hela röret och öppningen sättes ned i en skål med kvicksilver. Man upphettar så med stor försiktighet röret *AB*, så att kvicksilvret till sist kokar. Om röret var absolut torrt går kokningen lugnt, och det bildas en gasblåsa vid *C*, som vid avkylningen blir allt mindre. När röret svalnat tillräckligt, vänder man försiktigt på det, så att denna gasblåsa går ut genom öppningen *E*. Därefter får kvicksilverpelaren *CDE* försiktigt utrinna, varefter röret vändes, så att *AB* står lodrätt med *A* uppåt.

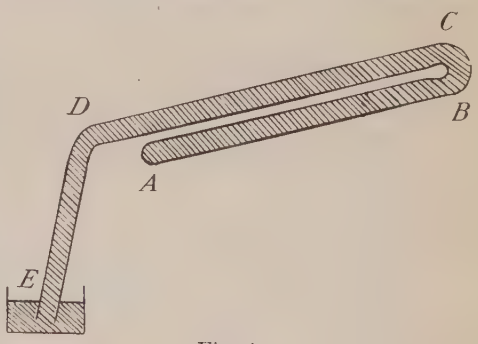


Fig. 1.

Sedan slås litet destillerat vatten ned i röret *EDC*, varefter det uppvärmes och drages ut till kapillärrör vid *D*. Detta rör böjes sedan som fig. 2 visar och öppningen *E* hänger ned i en kolv med häftigt kokande vatten. Nu uppvärmes också det destillerade vattnet vid *C* och får nästan helt och hållet bortkoka. Därvid förtränges all luft i *CD* och genom att en stund hålla lågan vid *D*, blir vattenångan däri avstängd från den yttre luften. Om man ej använder kolven med det kokande vattnet, utan låter ångan strömma direkt ut i luften vid *E*, suges vid tillsmältningen lätt litet luft tillbaka, när man ej fortsätter upphettningen vid *C*, och om man gör detta, blir trycket lätt för stort vid *D*, så att det blåses ett hål i väggen samma ögonblick man fått den igensmält.

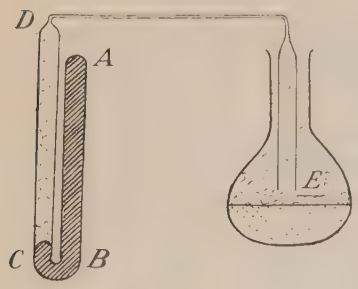


Fig. 2.

Det är mycket viktigt att vid användningen av apparaten ej vända på röret, ty då kan ju fuktigheten även komma in i barometerkammaren. Skulle detta inträffa, kan man genom försiktig uppvärmning av delen *AB* av röret i ställningen å fig. 3 få över fuktigheten till rätt sida, särskilt om man samtidigt avkyler vid *D*.

Vid alla här omnämnda upphettningar bör man för säkerhets skull skydda sig mot eventuella explosioner genom att

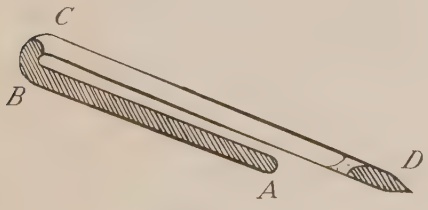


Fig. 3.

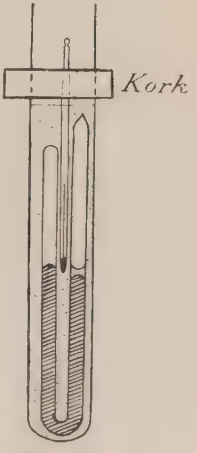


Fig. 4.

företaga uppvärmningen i dragskåp med så mycket som möjligt neddraget fönster. Den färdiga apparaten placeras i ett tillsmält c:a 2 cm vitt glasrör, vari vid försöket varmt vatten hälles (fig. 4). Medelst den å figuren tecknade korken fästes apparaten i ett stativ.

Man erhåller med en på detta sätt tillverkad apparat resultat för vattenångans maximitryck, som även på tiondels millimeter överensstämma med värdena i Regnaults tabell. Genom att en kall vinterdag taga ut apparaten i det fria kan man, om man före frysningen försiktigt skakar röret, även visa att vattenångan utövar tryck vid temperaturer under 0°.

Högre Latinläroverket i Göteborg d. $^{16}/_{4}$ 1925.

Glimlampans spektrum.

Av TORGNY EDQVIST.

I tvenne intressanta uppsatser i denna tidskrift har *C. E. Blom* presenterat glimlampan som en värdefull enhet i skolans fysiska apparatsamling, särskilt vid studiet av elektricitetsläran. Men även på andra områden kommer lampan till nytta, såsom i optiken, där den lämnar ett synnerligen vackert och konstant linjespektrum. Ur undervisningssynpunkt torde det vara av ett visst intresse att närmare undersöka detta spektrum, sådant det ter sig i ett vanligt skolspektroskop. I den för mig tillgängliga facklitteraturen har jag beträffande denna sak endast funnit ett kort meddelande av *Gatterer:* Über die Verwendung der Osram-Glimmlampe im Unterricht (Poskes tidskrift 1921, 258), vilket nästan uteslutande rör sig om heliumlinjernas uppträdande i lampans spektrum. Gatterer fotograferade dels glimlampans spektrum och dels heliumspektret på Perutz' ortokromatiska, ljusgårdsfria plåtar med känslighet t. o. m. orange. Exponeringstiden var för lampan vid 0,10 mm spaltbredd cirka 1 timme, för heliumspektret 2 minuter. Det befanns, att heliumlinjerna 5876, 5016, 4922, 4713, 4471 och 4386 ÅE koinciderade med linjer i lampans spektrum. Däremot erhölls ej koincidens för heliumlinjen 6678 ÅE.

Det av mig använda spektroskopet från *Schmidt & Haensch* i Berlin har konstant prismainställning; även kikaren och röret för skalan äro fasta. Den gula natriumlinjens läge på skalan avlästes till normalt 14,8. Vid liten spaltbredd kunde man nätt och jämnt konstatera, att linjen var dubbel. Graderingskurvan var uppritad enligt observationer på gula natriumlinjen, röda litiumlinjen 6708 ÅE, kaliumlinjerna

7668 och 4044, samt Ba 5536, Sr 4608 och He 3889. Kontrollförsök visade, att den uppnådda noggrannheten var $\pm 2\mu\mu$.

De undersökta lamporna voro dels 3 st. Osram kupollampor och dels 5 st. Philipslampor med spiralformade elektroder och matt glasglob. Osramlampornas spektra voro i fråga om linjerikedom underlägsna Philipslampornas och jämväl något skiljaktiga från varandra beträffande linjernas intensitet. Glimlampan innehåller som bekant neon, uppblandad med små mängder av andra gaser, förnämligast helium. Då det har visats av bl. a. *Ramsay* och *Collie*, att spektrum från ett geisslerrör kan starkt påverkas genom närvaro av obetydliga kvantiteter främmande gaser, liksom att även gasblandningens tryck spelar en stor roll, äro olikheterna mellan Osramlampornas spektra lätt förklarliga. Philipslampornas spektra däremot voro till synes identiska och visade samtliga de linjer, som observerats hos Osramlamporna.

Här nedan gives en tabell över alla linjer, som kunnat med ögat observeras hos en Philipslampa vid direkt inställning på dess katod. Våglängderna, som avlästs ur det ovan nämnda diagrammet, äro angivna i $\mu\mu$. Tabellariska våglängdsvärden äro genomgående uttryckta i Ångströmsenheter. Sådana värden ha utsatts i de fall, där jag ansett en någorlunda tillförlitlig identifiering vara möjlig med ledning av det föreliggande materialet.

De starkaste linjerna voro n:r 8—9, 12, 14—17, 20, 22, 24, 30—31, 39, 41. Påfallande svaga voro n:r 18, 23, 28, 40, 42—45. En del av de icke identifierade linjerna tillhöra förmodligen neons spektrum, för vilket jag saknar fullständiga våglängdsuppgifter. (Spektret lär ha ingående undersökts av *Meissner* och *Paschen* 1919.) Även argon linjer kunna väntas uppträda.

Spektrum domineras av den intensivt gula linjen n:r 22, som väl ej kan förväxlas med den gula natriumlinjen; det är lätt att visa, att n:r 22 har kortare våglängd. Ett annat misstag ligger närmare till hands, nämligen att identifiera

Tabell.

N:r	Obs. värde	Tabell-värde	Ämne	N:r	Obs. värde	Tabell-värde	Ämne	N:r	Obs. värde	Tabell-värde	Ämne
1	703	7 032	Ne	16	610	6 096	Ne	31	535	5 331	Ne
2	692	6 929	»	17	608	6 074	»	32	521	—	—
3	669	—	—	18	602	—	—	33	516	—	
4	667	—	—	19	598	5 976	Ne	34	512	—	—
5	659	6 599	Ne	20	596	5 945	»	35	509	—	—
6	655	6 533	»	21	587	5 876	He	36	506	5 048	He
7	652	6 507	»	22	585	5 852	Ne	37	503	5 016	»
8	641	6 402	»	23	580	5 820	»	38	493	4 922	»
9	639	6 383	»	24	576	5 764	»	39	471	4 713	»
10	634	6 334	»	25	574	—	—	40	453	—	—
11	631	6 305	»	26	570	—	—	41	447	4 471	He
12	628	6 267	»	27	567	—	—	42	442	—	—
13	622	6 217	»	28	558	—	—	43	438	4 388	He
14	616	6 164	»	29	542	5 401	Ne	44	402	4 026	»
15	614	6 143	»	30	536	5 341	»	45	387	3 889	»

n:r 22 med den kända gula heliumlinjen, vars våglängd är 5 876. Enligt min uppfattning uppträder denna linje som den relativt svaga n:r 21. N:r 22 bör i stället vara den kraftiga gula neonlinjen 5 852. Området närmast n:r 21 utmärkte sig i spektroskopet för en viss oskärpa. Detta kan bero på att det även existerar en neonlinje med den närliggande våglängden 5 882. Identifieringen av n:r 3—4 möter svårighet. Endera av dessa linjer är säkerligen neonlinjen 6 678,276 ÅE, men vilken är den andra? Mina våglängdstabeller lämna mig här i sticket. Det är nog icke fråga om heliumlinjen 6 678,149 ÅE, vilkens våglängd, såsom synes, skiljer sig från den nämnda neonlinjens endast med en bråkdel av 1 ÅE. Spektroskopet kan icke visa dessa linjer åtskilda. Gatterer uppgiver också, att heliumlinjen 6 678 ej påträffades i lampans spektrum. Emellertid är det anmärkningsvärt, att han ej synes ha funnit neonlinjen 6 678. Utom de av Gatterer nämnda linjerna har jag även funnit heliumlinjerna 5 048, 4 026 och 3 889. Gruppen n:r 29—31 är tydligen identisk med den av Gatterer omtalade »tripletten i grönt från 5 400 till 5 340», som han i likhet med mig hänför till neon. N:r 40 och 42 äro möjligtvis argon

(4 511 och 4 426). Även n:r 18 skulle kunna tolkas som den starka argonlinjen 6 031; dock finnes en närbelägen Ne-linje 6 030.

De tabellariska våglängdsvärdena ha nästan uteslutande tagits ur *Twyman:* Wavelength Tables, London 1923. I några fall har jag även rådfrågat *Kaye & Laby:* Physical and Chemical Constants, London 1921.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

På förf:s uttryckliga begäran intaga vi följande »genmäle». Några ytterligare anmärkningar från Red:s sida torde icke behövas.

Om geometriundervisningen i skolan.

Redaktionen har beledsagat min uppsats »Det Euklideiska systemet i geometrin» i förra häftet av denna tidskrift (mars 1925) med en hel mängd anmärkningar, som ej böra få stå oemotsagda. För överskådlighets skull meddelar jag mitt svar i form av en sammanhängande kort framställning av hur jag anser att den grundläggande geometriundervisningen bör bedrivas i skolan.

All undervisning bör gå från det åskådliga till det abstrakta; därför bör man i matematiken börja med geometri redan i första klassen. Jag har experimenterat med denna metod och funnit den vara förträfflig. Därvid har man att huvudsakligen låta barnen göra konstruktioner, mätningar och vägningar och draga *omedelbara* slutsatser. De äro nämligen ännu ej mogna att på egen hand draga en slutsats ur två premisser t. ex. om $a > b$ och $b > c$. De geometriska satser de då komma till ha samma grad av exakthet, som de fysiska lagar som de skulle erhålla på fysiktimmarna, om några sådana funnes. Under de tre första åren kunna de gott medhinna en dylik åskådningsgeometrisk kurs, som omfattar de viktigaste *resultaten* i plangeometrin och något stereometri. (Se vidare min bok »Geometrisk mätningslära».)

Läsåret 1904—1905, alltså året innan de frivilliga laborationerna officiellt infördes vid läroverken, lät jag pojkarna i klass 4 och klass 6:1 L göra samma experiment i fysik.

Jag hade då tillfälle att göra en jämförelse mellan lärjungarnas mogenhetsgrad på dessa stadier och fann till min förvåning att det var nästan ingen skillnad alls. Man har verkligen tämligen allmänt en benägenhet att underskatta barnens intelligens, men genom denna erfarenhet fann jag att barnen nästan ha nått sin fulla utveckling i intellektuellt hänseende redan i fjärde klassen — förut hade jag nämligen funnit, att pojkarna snarare voro piggare i 6:1 än i 7:2.

Vad som synes mig vara mest ägnat att utveckla intelligensen hos barnen är enkel reguladetri och den euklideiska geometrin. Den sistnämnda har fått sin rätta plats i klass 4 och bör där bedrivas med sträng logisk skärpa. Vid övergången från den rent experimentella till den logiska metoden i geometrin är det *enligt min erfarenhet* synnerligen förmånligt att kunna hänvisa till, att satserna nu hava bevisats gälla även för sfären samt koniska och cylindriska ytor. Symmetriegenskapen hos en sfär möter ingen svårighet för barnen att fatta, om man hänvisar till deras erfarenhet, att man kan vända ut och in på en trasig kautschukboll, mössan och andra klädesplagg. Denna erfarenhet är ej av väsentligen annat slag än den, att man kan »omlägga» en figur i planet. Visserligen kan sfärens symmetriegenskap bevisas, men det kan också planets.

Att vidga synvidden är just en av matematikens mest fascinerande och intresseväckande egenskaper; kommer härtill att den sfäriska geometrin icke alls läses vid svenska läroverk, icke ens en så fundamental sats som den om triangelytans samband med vinkelsumman i en sfärisk triangel, så borde man förstå värdet av de nämnda hänvisningarna till den sfäriska geometrin.

Å andra sidan bör det för uppövandet av den logiska redan vara nödvändigt att använda största möjliga noggrannhet och inte på ett oredigt sätt blanda ihop de »praktiska» intressena, som böra ha fått sitt redan i den experimentella kursen, med det logiska. Därför räknar jag Eukl. I:2 till ett av de snillrikaste momenten i den Euklideiska

byggnaden, på samma gång jag beklagar, att undervisningen vid universiteten så fullständigt försummar läran om geometrins grunder, att denna sats »av *alla* moderna läroböcker uteslutits eller omändrats», d. v. s. banaliserats.

Om man upptar en bevisbar sats utan bevis, så bör man inte kalla den för »axiom», vilket förvirrar begreppen, utan för lånesats eller »lemma», om det nu skall vara ett namn. Anser man sålunda, att Eukl. I:7 är för svår för nybörjare, så kan man meddela denna sats utan bevis, men då säga ifrån att den kan bevisas. Men man får inte *lura* barnen med konstruktioner, att den är självklar; vid en repetition blir den inte för svår att meddela. Ett annat sätt är att bevisa I:8 såsom Lindman gör, och då blir I:7 en omedelbar följd.

En annan virrighet är att definiera vinkeln såsom en »vridning». Detta låter sig göra i åskådningsgeometrin, men vill man hava klara grundbegrepp i geometrin, så bör man frigöra definitionerna från tanken på rörelse; i stället är det rörelsebegreppen som böra definieras med hjälp av de rent geometriska begreppen. Vad menas då med »vridning»? Man får en klar uppfattning därav, om man utgår från en vinkel och tänker sig det ena vinkelbenet vara orörligt, medan det andra successivt intar olika lägen, så att vinkeln kontinuerligt ökas eller minskas. Euklides' definition är då betydligt klarare än den »moderna» cirkeldefinitionen.

Slutligen får jag uttala den förhoppningen, att den yngre generationen lärare i matematik och fysik har vuxit ifrån den ståndpunkten, att man skulle kunna försvara traditionella oriktigheter och oklarheter med att de skulle vara så »pedagogiska».

Henrik Petrini.

Enheter för induktans och kapacitet.

I Fysiska Sällskapet i Stockholm höll lektor Gallander ett föredrag av i huvudsak samma innehåll som hans uppsats om C G S-systemets dimensionslära i denna tidskrift, häfte 1, 1924—25, och yrkade i slutet av föredraget att sällskapet ville vidtaga åtgärder för att i sin mån bidraga till ordnande av enhetssystem för kapaciteter och induktanser. Med anledning av detta yrkande tillsattes en kommitté, bestående av professorerna Carl Benedicks och H. Pleijel samt lektor Otto Gallander. Denna kommitté har avgivit följande yttrande.

Med anledning av Sällskapets anmodan vid sammanträde den 25 oktober 1924 att avgiva yttrande angående enheter för induktans och kapacitet få undertecknade härmed anföra följande.

Grundenheterna för elektrisk ström och spänning definierades, som bekant, före 1908 års internationella kongress för måttsystem enligt C G S-systemet.

Dessa definitioner äro emellertid så svåra att tillämpa vid mätningar, att nämnda kongress beslöt definiera enheten för elektrisk ström genom dennas elektrolytiska verkan och enheten för motstånd genom en relativt lätt och skarpt reproducerbar etalong. Definitionerna fastslogos i överensstämmelse med de värden som antagits av 1893 års kongress i Chicago utan att hänsyn togs till de noggrannare värden på den teoretiska ampèrens elektrolytiska verkan och den teoretiska ohmens representation av kvicksilverpelare, som erhållits efter 1893. Genom detta kongressbeslut av 1908 har C G S-systemet faktiskt mist sin betydelse för den elektriska mättekniken.

För övriga elektriska storheter definieras de praktiska enheterna såväl före som efter 1908 genom användning av kända lagar, i det man utgår från definitionerna på ampère och ohm. För induktans (= självinduktion) och kapacitet får man då enheterna henry (H) och farad (F) respektive. Dessa enheter äro emellertid i de flesta fall för stora. Man har därför infört enheterna mikrohenry ($\mu H = H \cdot 10^{-6}$)

och mikrofarad ($\mu F = F \cdot 10^{-6}$) som underavdelningar av nämnda huvudenheter. Vid sidan av dessa naturliga enheter har man — särskilt i radiotekniken — för kapacitet infört en enhet, som är grundad på det elektrostatiska systemet, och är av storleken $F \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$. Såväl denna sistnämnda enhet som enheten $H \cdot 10^{-9}$ hava kallats cm, ej därför att man kan mäta en induktans eller en kapacitet endast genom att mäta en längd, utan därför att induktansens s. k. dimension i det elektromagnetiska systemet är längd och kapacitetens i det elektrostatiska systemet likaledes är längd.

Namnet cm på dessa enheter för induktans och kapacitet är således grundat på en dimensionslära, vars dubbelhet visar godtycket i de valda utgångspunkterna.

Om man inför onödiga enheter, som genom mer eller mindre besvärliga reduktionsfaktorer äro bundna vid motsvarande huvudenheter, medför detta åtskilligt extra arbete.

Att i en framställning, ja t. o. m. i samma formel använda enheter från olika måttsystem är oegentligt, och än mer betänklig blir saken, när enheter av helt olika slag erhålla samma namn.

Då det i praktiken använda systemet av enheter närmast sammanhänger med det elektromagnetiska enhetssystemet, vore det lämpligast att uteslutande använda detta eller motsvarande praktiska enheter. Beträffande underavdelning av enheten för induktans torde mikrohenry i de flesta fall vara att föredraga framför $H \cdot 10^{-9}$, såväl med avseende på dess storlek som på grund av den jämna exponenten, vilken gör räkningar enklare. Beträffande underavdelningen av kapacitetens praktiska enhet finnes intet skäl att frångå mikrofarad, som nära ansluter sig till enheten mikrohenry. Denna enhet är dock i en del fall, särskilt vid vissa elektrostatiska mätningar och i radioteknik, alltför stor. Detta förklarar i viss mån att man använder enheten cm, som är $F \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$. Det vore dock mer rationellt att i stället för cm i dylika fall använda enheten mikromikrofarad ($\mu\mu F = F \cdot 10^{-12}$), som är av samma storleksordning.

Commission Electrotechnique Internationale upptager ej heller för någon av ifrågavarande storheter enheten cm.

Undertecknade få därför föreslå, att Fysiska Sällskapet i Stockholm ville uppmana lärare och författare att icke betjäna sig av enheten cm för induktans eller kapacitet utan i stället som underavdelningar av huvudenheterna henry och farad använda mikrohenry, mikrofarad och mikromikrofarad.

Carl Benedicks. *H. Pleijel.* *Otto Gallander.*

Bedömning och lösningar till prisuppgiften för årg. 1924—25.

Uppgiften lydde:

A är ett tresiffrigt tal, där första siffran är mer än en enhet större än den sista. A' är det tal som uppkommer då siffrorna skrivas i motsatt ordning. B = A — A', B' det tal som uppkommer då siffrorna i B skrivas i motsatt ordning. Vad blir B + B'? Lös detta problem och utsträck det till tal med flera siffror.

Tvenne svar hava inkommit, vilka båda löst själva uppgiften riktigt. Vad utsträckningen beträffar, så komplettera de varandra på ett egendomligt sätt.

Karl-Erik Quensel i R. IV vid Högre allmänna läroverket i Malmö har nämligen fullständigt löst frågan för 4—7-siffriga tal och även angivit metoden för tal med flera siffror. (Ett mindre misstag spelar ingen större roll.)

Mogens Pihl i 3:e gymnasieklassen i Ordrups gymnasium, Köpenhamn, har däremot givit den allmänna formen för tal med n siffror, men endast under det inskränkande villkoret, att första siffran är större än den sista, den andra större än den näst sista o. s. v.

Då den senares lösning visar betydligt djupare insikter i matematik än den förres, så har Red. beslutit tilldela första priset *Grimsehl, Lehrbuch der Physik*, åt

Mogens Pihl

och andra priset *Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien*, åt

Karl-Erik Quensel.

Första pristagarens lösning.

Definition: Ved $p_1p_2p_3 \ldots p_n$ forstaas: $p_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots + p_n$, uafhængig af hvad p_1, $p_2 \ldots p_n$ end maa være till Fortegn og Störrelse.

Sætninger: $\partial = a_1a_2 \ldots a_n \pm b_1b_2 \ldots b_n =$
$= (a_1 \pm b_1)(a_2 \pm b_2) \ldots (a_n \pm b_n)$ hvor: a'enne og b'enne er et af Tallene 1, 2, ... 9.[1] Sætningen fremgaar af at:

$$\partial = (a_1 \pm b_1)10^{n-1} + \ldots + (a_n \pm b_n),$$

som efter vores definition er:

$$(a_1 \pm b_1)(a_2 \pm b_2) \ldots (a_n \pm b_n).$$

Betegner A' A skrevet i omvendt Orden saa er:

$$[a_1a_2 \ldots a_{p-1}(-a_p)(-a_{p+1}) \ldots (-a_n)]' =$$
$$= [10 - a_n][9 - a_{n-1}] \ldots [9 - a_p][a_{p-1} - 1]\, a_{p-2} \ldots a_2a_1$$ [2]

hvor a'enne er et af Tallene: 1, 2, ... 9.

Sætningen framgaar af at:

$$a_1a_2 \ldots a_{p-1}(-a_p) \ldots (-a_n) =$$
$$a_1a_2 \ldots a_{p-1}\overbrace{0\ 0 \ldots\ 0}^{n-p+1}$$
$$-0\ 0\ \ldots\ 0 \quad a_pa_{p+1} \ldots a_n$$

hvoraf ved Subtraktion og Skriven af Tallene i omvendt Orden det önskede Udtryk faas.

[1] Vi beviser kun Sætningen for det specielle Tilfælde hvar a'enne og b'enne er et af Tallene 1, 2, ... 9.

[2] For $n = 3$ gælder denne Regle paa Grund af Leddenes mindste Antal (4) ikke.

A. Antallet af Ciffre er 3.

$A = a_1 a_2 a_3$ a'enne er et af Tallene: 1, 2, ... 9.

$A' = a_3 a_2 a_1$.

$B = (a_1 - a_3)\,0\,[-(a_1 - a_3)] = (a_1 - a_3)\,100 - (a_1 - a_3) \cdot 1 = 99 \cdot d_1$ hvor $d_1 = a_1 - a_3$ vi forudsætter her: $a_1 > a_3$.

$B = 99 d_1 = (d_1 - 1)\,100 + 9 \cdot 10 + 9 - (d_1 - 1)$ vi forudsætter her: $d_1 = a_1 - a_3 > 1$.

$B' = [9 - (d_1 - 1)]\,100 + 9 \cdot 10 + (d_1 - 1)$.

$B + B' = 9 \cdot 100 + 18 \cdot 10 + 9 = 1\,089$.

Det ses at vor Forudsætning $a_1 - a_2 > 1$ [og heraf > 0] er den samme der er gjort i Opgaven.

*

B. Antallet af Ciffre er 2n. n hel og positiv.

$\overbrace{A = a_1 a_2 \ldots a_n}^{n}\ a_{n+1} \ldots a_{2n}$ a'enne er et af Tallene = 1, 2, ... 9.

$A' = a_{2n} \ldots a_{n+1}\ a_n \ldots a_1$

$B = d_1 d_2 \ldots d_n (-d_n)(-d_{n-1}) \ldots (-d_1)$

i det: $d_p = a_p - a_{2n-(p-1)}$.

Vi forudsætter: d'enne positive d. v. s.

$$a_1 > a_{2n},\ a_2 > a_{2n-1} \text{ etc.}$$

$$B' = (10 - d_1)(9 - d_2) \ldots (9 - d_n)(d_n - 1)\, d_{n-1} \ldots d_2 d_1 \quad \text{(I)}$$

i det: $B = d_1 d_2 \ldots (d_n - 1)(9 - d_n)(9 - d_{n-1}) \ldots (9 - d_2)(10 - d_1)$ (II)

Jæmfør de Sætninger vi beviste i Indledningen og hvorledes vi beviste dem.

(I) og (II) giver:

$$B + B' = \overbrace{(10)\,9 \ldots 9\,8}^{n}\ \overbrace{8\,9\,9 \ldots 9\,(10)}^{n} = \overbrace{\mathbf{109 \ldots 98}}^{n+1}\ \overbrace{\mathbf{90 \ldots 0}}^{n}.$$

Da Udtrykket $B + B'$ mindst kan indeholde 7 Ciffre [1098900] saa maa vi undersøge for $2n = 4$ og 2.

I. $2n=2$.

$A=a_1a_2$ $\quad a_1$ og a_2 er et af Tallene: 1, 2, ... 9.

$A'=a_2a_1$

$A-A'=(a_1-a_2)[-(a_1-a_2)]=9(a_1-a_2)=9d_1$ vi forudsætter $a_1>a_2$ d. v. s. $d_1>0$.

$B=9d_1=(d_1-1)10+9-(d_1-1)$ $\quad \boldsymbol{d_1>1}$ d. v. s.: $a_1-a_2>1$ [ellers blir B enciffret].

$B'=[9-(d_1-1)]10+d_1-1$.

$B+B'=9\cdot 10+9=\boldsymbol{99}$.

II. $2n=4$.

$A=a_1a_2a_3a_4$ hvor $d_1=a_1-a_4$ $d_2=a_2-a_3$ $\boldsymbol{d_1>0}$. $\boldsymbol{d_2>0}$.

$A'=a_4a_3a_2a_1$.

$B=d_1d_2(-d_2)(-d_1)=$

$B=999d_1+90d_2=d_1 10^3+(d_2-1)10^2+(9-d_2)10+$
$+(10-d_1)$.

$B'=$ $\quad (10-d_1)10^3+(9-d_2)10^2+$
$+(d_2-1)10+d_1$

$B+B'=$ $\quad 10^4+8\cdot 10^2+8\cdot 10+10=\boldsymbol{10\,890}$.

C. Antallet af Ciffre er $2n+1$. n hel og positiv >1.

$A=\overbrace{a_1\ a_2\ \ldots\ a_n}^{n}\quad a_{n+1}\ \overbrace{a_{n+2}+\ \ldots\ a_{2n+1}}^{n}$

$A'=a_{2n+1}\ldots a_{n+2}\ a_{n+1}\ a_n\ \ldots\ldots\ a_1$

$B=d_1\ d_2\ \ldots\ d_n\quad 0\quad (-d_n)(-d_{n-1})\ldots(-d_2)(-d_1)$

i det: $d_p=(a_p-a_{2n-(p-2)})$ og vi forudsætter d'enne positive d. v. s.: $a_1>a_{2n+1}$ etc.

$B'=(10-d_1)(9-d_2)\ldots(9-d_n)\ 9\ (d_n-1)\ d_{n-1}\ldots d_2\ d_1$

i det:

$B=\ d_1\ d_2\ldots(d_n-1)\ 9\ (9-d_n)(9-d_{n-1})\ldots(9-d_2)(10-d_1)$

$B+B'=\underbrace{(10)\quad 9\ldots 8}_{n}\ \ (18)\ \ \underbrace{8\quad 9\ldots 9\ (10)}_{n}$

heraf: $B+B'=\underbrace{1099\ldots 98}_{n+2}\ \ \underbrace{90\ldots 0}_{n}$.

Da $B+B'$ mindst her kan indeholde 6 Ciffre [109890] saa maa vi undersøge for $2n+1=3$ og $2n+1=1$.

—

$2n+1=3$ har vi undersøgt.

—

$2n+1=1$.

Resultatet bliver da 0, forsaavidt som vi definierer

$p'=p\cdot[p$ er et af Tallene 1, 2 ... 9].

Man lægger mærke til, at Udtrykkene for lige og ulige Tal er forskellige, i det »det ulige Resultat», som indeholder 1 Ciffer mere end det foregaaende »lige Resultat», er dannet av dette, ved at indskyde et 9-Tal foran det 3:e Ciffer som ogsaa er et Nital.

*

Andra pristagarens lösning.

I. Tresiffriga tal. $100a+10b+c$.

$a-c-1>0$.

$A=100a+10b+c$.

$A_1=100c+10b+a$.

$B=A-A_1=100(a-c)+(c-a)$ $\quad c-a<0$.

$B=100(a-c-1)+90+(10+c-a)$ $\quad 9\,(\leqq)\,10+c-a$.

$B_1=100(10+c-a)+90+(a-c-1)$.

$B+B_1=900+180+9=$ ***1089.*** $\quad a=c+1;\ x=$ ***198.***

$a=c;\quad x=$ ***0.***

II. Fyrsiffriga tal. Tre fall möjliga.

1) $b-c-1\geqq 0$.

$A=1000a+100b+10c+d$.

$A_1=1000d+100c+10b+a$.

$B=1000(a-d)+100(b-c)+10(c-b)+(d-a)$.

$B=1000(a-d)+100(b-c-1)+10(9+c-b)+10+d-a$.

$B_1=1000(10+d-a)+100(9+c-b)+10(b-c-1)+a-d$.

$B+B_1=10000+800+80+10=$ ***10890.***

2) $b-c=0$.

$A = 1000a+100b+10c+d$.

$A_1 = 1000d+100c+10b+a$.

$A - A_1 = 1000(a-d)+d-a$.

$B = 1000(a-d-1)+900+90+(10+d-a)$.

$B_1 = 1000(10+d-a)+900+90+(a-d-1)$.

$B + B_1 = 9000+1800+180+9 = \mathbf{10989}$.

3) $b-c<0$.

$A = 1000a+100b+10c+d$.

$A_1 = 1000d+100c+10b+a$.

$B = 1000(a-d)+100(b-c)+10(c-b)+(d-a)$.

$B = 1000(a-d-1)+100(10+b-c)+10(c-b-1)+$
$+(10+d-a)$.

$B_1 = 1000(10+d-a)+100(c-b-1)+10(10+b-c)+$
$+(a-d-1)$.

$B + B_1 = 9000+900+90+9 = \mathbf{9999}$.

III. Femsiffriga tal.

Samma fall som vid fyrsiffriga tal.

1) $B+B_1=109890$. 2) $B+B_1=109989$. 3) 99099.

För sex- och sjusiffriga tal finnes 9 möjligheter.

Talets siffror a b c (g) d e f	sexsiffriga tal	sjusiffriga tal
1) $b-e>0$.		
a) $c-d>0$	1098900	10998900
b) $c-d=0$	1099890	10999890
c) $c-d<0$	1089990	10890990.
2) $b-e=0$.		
a) $c-d>0$	1098900	10998900
b) $c-d=0$	1099989	10999989
c) $c-d<0$	1090089	10891089.

3) $b-e<0$.

a) $c-d>0$	999999	10008999
b) $c-d=0$	990099	9900099
c) $c-d<0$	991089	9901089.

För åttasiffriga tal bli möjligheterna 27 etc.

Matematiska uppgifter.

187) Att upprita en triangel, där två sidor äro givna och en vinkel skall vara dubbelt så stor som en annan. (3 fall.) *M—r.*

188) Sök orten för mittpunkterna till alla kordor i en cirkel, som från en given punkt synas under rät vinkel.

189) O är en cirkels medelpunkt, A en punkt inom cirkeln. Genom A dragas till periferin linjerna AB och AC, som med AO göra vinklarna α och $\pi-\alpha$ resp. och ligga på ena sidan av AO. Visa att BC skär OA:s förlängning i en punkt, som är konstant för olika α. *X.*

190) Vilken relation måste finnas mellan koefficienterna a, b, c i funktionen $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, för att en andragradsfunktion $\varphi(x)$ skall kunna finnas, sådan att andra derivatan av $f(x)\cdot\varphi(x)$ är $=f(x)$?

191) Visa att

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$$

192) I ett tresidigt hörn är kantvinkeln γ rät och kantvinkeln α given och spetsig. Hur stor skall sidovinkeln a vara för att skillnaden $(b-c)$ mellan de övriga sidovinklarna skall bliva så stor som möjligt?

Lösningar till uppg. i häft. 2. 1924—25.

175) *En person håller vad och satsar 2 kr. på att han i ett kast med två tärningar skall få upp antingen 4, 5 eller 6 ögon. Hur mycket kan motparten satsa för att båda skola få lika vinstchanser?*

Vi måste räkna 36 lika sannolika kast (kasten $(a - b)$ och $(b - a)$ måste räknas skilda), så äro de gynnsamma fallens antal $3+4+5=12$ och de ogynnsammas 24. Motspelaren måste således satsa 4 kr. *X, Iter.*

176) *En triangel ABC är given samt två godtyckliga punkter P och Q i rymden, sådana att* $\frac{PA}{QA}=\frac{PB}{QB}=\frac{PC}{QC}$.

a) *Visa att PQ alltid måste råka en viss rät linje.*

b) *Om P är given, sök orten för Q.*

a) Om PQ delas harmoniskt i ett förhållande lika med de tre i satsen omnämnda, så måste A, B och C ligga på den harmoniska sfären och PQ gå genom dess medelpunkt. Den träffar således den linje, som går genom den kring ABC omskrivna cirkelns medelpunkt och är vinkelrät mot dess plan, ty denna linje är orten för medelpunkterna till alla sfärer genom A, B och C.

b) Om likheten mellan förhållandena ovan skrivas

$$\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB},\quad \frac{PA}{PC}=\frac{QA}{QC},$$

så inses att Q måste ligga dels på den sfär som delar AB harmoniskt i förhållandet $\frac{PA}{PB}$, dels på den som delar AC harmoniskt i förhållandet $\frac{PA}{PC}$. Orten är således en cirkel, vilken tydligen ligger i det plan, som bestämmes av P och den förut nämnda vinkelräta linjen. Löst av X och *Iter.*

177) *Om a och b äro två sidor i en triangel, α och β motstående vinklar och $a > b$, så är* $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{a}{b}$.

Bevis I. Sättes

$$y = \frac{x}{\sin x}, \text{ så är } \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x(\operatorname{tg} x - x)}{\sin^2 x},$$

vilket är > 0, om $\pi > x > 0$. $\frac{x}{\sin x}$ växer då således med x. Om då $\alpha > \beta$, är således

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} > \frac{\beta}{\sin\beta} \therefore \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}. \qquad \textit{Iter.}$$

Bevis II. Emedan $a > b$,

$$\text{är } \sin\alpha > \sin\beta,\ \alpha > \beta,\ \frac{\alpha}{2} > \frac{\beta}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\beta}{2}.$$

Men

$$\frac{a}{b} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} < \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} < \frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\beta}{4}} < \ldots < \frac{\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\beta}{2^n}} < \lim_{n=\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{n}}{\sin\frac{\beta}{n}}.$$

Men delas vinklarna 2α och 2β vid medelpunkten i triangelns omskrivna cirkel, vars radie sättes $= 1$, i n lika delar, så få vi att

$$2\alpha = \lim_{n=\infty} n \cdot 2\sin\frac{\alpha}{n},\ 2\beta = \lim_{n=\infty} n \cdot 2\sin\frac{\beta}{n},$$

således

$$\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{n=\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{n}}{\sin\frac{\beta}{n}} > \frac{a}{b}. \qquad \textit{M—r.}$$

178) *I en olikbent triangel är en vinkel 60°, och en närliggande sida mätes av primtalet $n > 2$. Hur stora äro de övriga sidorna, om de mätas av hela tal?*

De sökta sidorna x och y (y den mot 60°-vinkeln stående). Då är enligt cos-teoremet

$$y^2 = x^2 + n^2 - nx,$$

således

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = n(x-n)$$

eller, om vi för korthetens skull sätta $x+y=s$, $x-y=d$,

$$s \cdot d = n(x-n) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Då n skall vara ett primtal, måste en av faktorerna i vänstra membrum i (1) innehålla faktorn n. Nu kan emellertid d icke innehålla denna faktor, då $n > |d| > 0$. Således måste s innehålla faktorn n. Vi kunna därför sätta

$$s = m \cdot n, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

där m är ett helt tal > 1.

Förkortas (1) med n, erhålles

$$md = x - n$$

eller $$md+n = x = \tfrac{1}{2}(s+d) = \tfrac{1}{2}(mn+d),$$

varav $$(2m-1)d = (m-2)n. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

För $m=2$ erhålles en liksidig triangel, vilken lösning enligt uppgiftens ordalydelse är utesluten. Man ser då, att $2m-1$ måste innehålla faktorn n. Sätta vi då

$$\begin{cases} 2m-1 = k \cdot n, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4) \\ m-2 = k \cdot d, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5) \end{cases}$$

erhålles genom elimination av m

$$k(n-2d) = 3, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

vilken ekvation ger *två* lösningar:

k	1	3
d	$\frac{1}{2}(n-3)$	$\frac{1}{2}(n-1)$
m	$\frac{1}{2}(n+1)$	$\frac{1}{2}(3n+1)$
s	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$\frac{1}{2}n(3n+1)$
x	$\frac{1}{4}(n-1)(n+3)$	$\frac{1}{4}(n+1)(3n-1)$
y	$\frac{1}{4}(n^2+3)$	$\frac{1}{4}(3n^2+1)$

I omstående tabell anges lösningarna för alla udda primtal < 20. För $n=3$ bortfaller en lösning, som ger en liksidig triangel.

Oliksidiga trianglar.

n	x_1	y_1	x_2	y_2
3			8	7
5	8	7	21	19
7	15	13	40	37
11	35	31	96	91
13	48	43	133	127
17	80	73	225	217
19	99	91	280	271

För växande n har y en tendens att vrida sig till parallellitet med x. Bland alla olikbenta trianglar, som uppfylla villkoren, finnes endast *en* spetsvinklig triangel ($n=5$, $x=8$, $y=7$).

Mellan sidorna i motsvarande trianglar av kategorierna 1) och 2) har man relationerna

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 - (n-2), \\ y_2 = 3y_1 - 2. \end{cases}$$

Iter. Även löst av *X*.

179) *10 l luft, till $^3/_4$ mättad med vattenånga, befinner sig vid 76 cm tryck och 60° temperatur. Om trycket ökas till 106 cm och temperaturen sänkes till 10°, hur stor blir volymen, och hur mycket vatten utfaller?*

Ångans sp. vikt $= {}^5/_8$, luftens sp. vikt $= 0{,}001293$, mättad ångas tryck vid 60° $= 14{,}94$ cm, vid 10° $= 9{,}20$ mm.[1]

En enkel undersökning visar, att vattenångan i det senare fallet är mättad. Tänker man sig nämligen den fuktiga luften sammantryckt till $\frac{3}{4}$ av den ursprungliga volymen, under det att temperaturen bibehålles vid 60°, kommer vattenångan att antaga sitt maximitryck för denna temperatur. Den fuktiga luftens tryck är då $\frac{4}{3} \cdot 76 = 101{,}33$ cm. Om nu trycket ytterligare ökas till 106 cm och temperaturen därjämte sänkes till 10°, måste ånga kondenseras.

Antages den sökta volymen vara V liter, får man således,

[1] I texten stod genom tryckfel 9,2 cm.

om man på den *torra luften* tillämpar gasernas allmänna tillståndslag,

$$\frac{10(76-\frac{3}{4}\cdot 14{,}94)}{273+60}=\frac{V(106-0{,}92)}{273+10},$$

varav

$$V=5{,}240.$$

Vattenångans vikt i gram är i första fallet

$$G_1=10\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\frac{1{,}293\cdot 14{,}94}{76(1+\frac{69}{273})}=0{,}9768,$$

i andra fallet

$$G_2=5{,}24\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\frac{1{,}293\cdot 0{,}92}{76(1+\frac{10}{273})}=0{,}0495.$$

(G_2 har här beräknats med användning av det ur tillståndsekvationen erhållna värdet på log V.)

Man finner således, att 0,927 g vattenånga (omkr. 95 % av ångan) kondenserats.

Anm. Enklare utföres beräkningen med tillhjälp av en tabell över mättad vattenångas täthet resp. vikt per volymsenhet vid olika temperaturer. En sådan tabell finns exempelvis i *Hütte*, Des Ingenieurs Taschenbuch, 22. Aufl., Band I, p. 418. Den mättade vattenångans vikt i gram per liter (kg per m^3) vid 10° och 60° angives där till 0,00938 resp. 0,12995. Man får då

$$G_1=\tfrac{3}{4}\cdot 1{,}2995=0{,}9746,$$

$$G_2=5{,}24\cdot 0{,}00938=0{,}0492,$$

således $$G_1-G_2=0{,}925.$$

De så erhållna värdena skilja sig i tredje eller fjärde decimalen från de ovan beräknade, tydligen beroende på att tabellen hos *Hütte* (efter *Mollier*, Neue Tabellen und Diagramme für Wasserdampf, Berlin 1906) är baserad på något lägre värden för vattenångans mättningstryck (trycken vid 10° resp. 60° anges där till 9,17 resp. 148,8 mm).

Iter.

180) *En ström av 0,8 amp. genomgår ett svavelsyrebad av 5 Ω motstånd. Hur stor del av den energi, som strömmen utvecklar i badet, kommer till synes som kemisk energi?*

1 amp. utfäller 0,01044 mg H per sek., Joulska kostanten 0,24, och vattnets termokemiska formel är

$$H_2 + O = H_2O + 68\,340 \text{ grkal.}$$

Strömmen utvecklar per sek. $0{,}8 \cdot 0{,}00001044$ gr H, vartill åtgår $W = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}00001044 \cdot 34170}{0{,}24} = 1{,}190$ watt. Det sökta förhållandet är då förhållandet mellan detta och detsamma, ökat med värmeutvecklingen i badet, således

$$x = \frac{W}{W + 5 \cdot 0{,}8^2} = \frac{1{,}190}{1{,}190 + 3{,}2} = 0{,}2708.$$

Svar: 27 % förvandlas till kemisk energi.

Fråga och svar.

Fråga: Blir ett rum ljusare, om speglar upphängas på väggarna? *L. R.*

Svar: Skillnaden mellan en spegel och en annan yta är endast den, att spegeln reflekterar ljuset regelbundet, men andra ytor oregelbundet; båda absorbera en del ljus. Om således väggarna förut äro beklädda med tapeter som absorbera föga ljus, således rent vita, så kan rummet t. o. m. bliva mörkare genom speglarnas anbringande; om däremot tapeterna, såsom vanligt är, absorbera mer ljus än spegeln, så blir rummet verkligen ljusare. Detta gäller emellertid endast rummet såsom helhet: fördelningen av ljuset blir alltid en annan. Så kunna t. ex. vissa fläckar bliva betydligt ljusare genom spegelns upphängande, ett fenomen som är väl bekant under namn av »solkattor», under det att övriga delar förlora något av sin belysning, detta särskilt om »solkatten» faller på en mörk yta eller ut genom fönstret, så att blott en ringa del av dess ljus återkastas. *M—r.*